

中国科学院大学线性代数(上)第五次作业题

主讲老师: 李子明

助教: 杜昊, 郭婧

1. 计算线性组合 $2X_1 + 5X_2 - 3X_3$, 其中

$$X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

2. 求一个非零的三元齐次线性方程组, 使得

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

都是该方程组的解。

3. 设 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^n$ 满足 \vec{v}_1, \vec{v}_2 线性无关, \vec{v}_2, \vec{v}_3 线性无关, \vec{v}_1, \vec{v}_3 线性无关, 问: $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ 是否一定线性无关? 如果是, 证明你的结论; 如果不是, 请举出反例。

4. 证明: 如果 \mathbf{u} 可由 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 线性表出, 则 \mathbf{u} 可由 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 的极大线性无关组线性表出。

5. (1) 如果 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 线性无关, 请问 $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1$ 是否线性无关? 为什么?

(2) 如果 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 线性相关, 请问 $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1$ 是否线性相关? 为什么?

6. 设

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(1) 证明: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 线性无关;

(2) 把 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 扩充成 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5\}$ 的极大线性无关组。