

中国科学院大学线性代数(上)第六次作业题
主讲老师: 李子明
助教: 杜昊, 郭婧

1. 柯斯特利金-代数学引论(第一卷) 第55页: 1.
2. 设 V_1, V_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中两个线性子空间。证明:
 $V_1 + V_2$ 是直和当且仅当 $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$ 。
3. 柯斯特利金-代数学引论(第一卷) 第55页: 4.
4. 柯斯特利金-代数学引论(第一卷) 第56页: 5.
5. 求下列矩阵的秩:

$$(1) \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. 设 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 求下列矩阵的秩:

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \cdots & \mu & 1 \\ \mu & \lambda & \cdots & \mu & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu & \mu & \cdots & \lambda & 1 \\ \mu & \mu & \cdots & \mu & 1 \end{pmatrix}$$

(3) $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 其中 $a_{ij} = \min(i, j)$.