

中国科学院大学线性代数(上)第七次作业题

主讲老师: 李子明

助教: 杜昊, 郭婧

1. 柯斯特利金-代数学引论(第一卷) 第81页: 1.

选做: 如果是线性映射, 找出它的矩阵。

2. 求下列线性方程组(1)的解空间的一组基和方程组(2)的全部解:

$$(1) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 & = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 & = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 & = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 & = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 & = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 & = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 & = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 & = 1 \end{cases}$$

3. 设 $A \in \mathbb{R}^{5 \times 7}$, 并且以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组解空间 V_A 的基底由 3 个向量组成, 求 $\text{rank}(A)$ 。问: V_A 的维数可能是 1 吗?

4. 设 $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射。证明: 如果 ϕ 是单射, 则 $m \geq n$ 。

5. 证明:

(1) 矩阵加一行, 则秩或者不变或者增加 1;

(2) 矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 且 $\text{rank}(A) = r$, 则 A 的任意 s 行可组成一个秩不小于 $r + s - m$ 的矩阵。

6. (选做) 柯斯特利金-代数学引论(第一卷) 第61页: 4.