中国科学院大学线性代数(上)第八次作业题
主讲老师: 李子明
助教: 杜昊, 郭婧

---

1. 定义映射

$$\begin{array}{cccc} \phi: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

(1) 证明 ϕ 是线性映射；

(2) 求 ϕ 在标准基下的矩阵；

(3) 分别求 $\ker(\phi)$ 和 $\operatorname{im}(\phi)$ 的一组基。

2. 下列矩阵运算：

$$(1)\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \qquad (3)\ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$$

3. 设矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$，其中 $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$。令

$$J_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\ \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times m} \qquad J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\ \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

求矩阵乘法 $J_m A$ 和 $A J_n$。