中国科学院大学线性代数(上)第九次作业题
主讲老师: 李子明
助教: 杜昊, 郭婧

---

1. 设 $a,b,c\in\mathbb{R}$, $m,n\in\mathbb{Z}^+$，求下列矩阵

$$(1)\ \begin{pmatrix}1&a&c\\0&1&b\\0&0&1\end{pmatrix}^m \qquad (2)\ \begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\0&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}^m_{n\times n}$$

2. 柯斯特利金-代数学引论（第一卷） 第82页：$5,9,10,11$.

3. 设 $m,n,p,q\in\mathbb{Z}^+$，矩阵 $A\in\mathbb{R}^{m\times n},B\in\mathbb{R}^{p\times q},C\in\mathbb{R}^{m\times q},D\in\mathbb{R}^{p\times n}$。证明：

$$\begin{aligned}
(1)\quad \mathrm{rank}\begin{pmatrix}A&O_{m\times q}\\O_{p\times n}&B\end{pmatrix} &= \mathrm{rank}\begin{pmatrix}O_{m\times q}&A\\B&O_{p\times n}\end{pmatrix} = \mathrm{rank}A+\mathrm{rank}B\\
(2)\quad \mathrm{rank}\begin{pmatrix}A&C\\O_{p\times n}&B\end{pmatrix} &= \mathrm{rank}\begin{pmatrix}C&A\\B&O_{p\times n}\end{pmatrix} \geq \mathrm{rank}A+\mathrm{rank}B\\
(3)\quad \mathrm{rank}\begin{pmatrix}A&O_{m\times q}\\D&B\end{pmatrix} &= \mathrm{rank}\begin{pmatrix}O_{m\times q}&A\\B&D\end{pmatrix} \geq \mathrm{rank}A+\mathrm{rank}B
\end{aligned}$$