

中国科学院大学线性代数(下)第十次作业题

主讲老师: 李子明

助教: 杜昊, 郭婧

1. 设 F 是特征为零的域, 证明下列矩阵不相似:

$$(i) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \not\sim_s \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$(ii) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \not\sim_s \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. 计算矩阵 $T \in GL_2(\mathbb{R})$, 使得 $T^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. 设 V 是域 F 上的线性空间, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ 是 V 的一组基. 设 σ 是 V 上的线性算子, 满足

$$\sigma(\vec{v}_1) = \vec{v}_1, \quad \sigma(\vec{v}_2) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad \sigma(\vec{v}_3) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3.$$

(i) 证明: σ 是可逆线性算子;

(ii) 求 $2\sigma - \sigma^{-1}$ 在基 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ 下的矩阵.

4. 设 A 是域 F 上的 n 阶方阵, E 是域 F 上的 n 阶单位阵, 且 $A^2 = 2A + 3E$.

证明: $\text{rank}(A + E) + \text{rank}(A - 3E) = n$.

5. 席南华-基础代数(第二卷)第56页: 5, 6, 7.

注: 6, 7 题可以用第5 题的结论证明.