

中国科学院大学线性代数(下)第十六次作业题
主讲老师: 李子明
助教: 杜昊, 郭婧

1. 计算下列矩阵的约当标准型

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

提示: 两个矩阵的特征多项式分别为 $(t-3)(t+1)^2$, $(t-1)^4$.

2. 席南华-基础代数(第二卷) 第84页: 18.

3. 计算矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ & \ddots & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$ 的约当标准型.

4. 设复矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & -1 \end{pmatrix},$$

问矩阵 A 可能有什么样的约当标准型? 并求 A 可对角化的充要条件.

5. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

证明: $\forall f \in \mathbb{C}[t]$, $f(A)$ 的特征值为 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$.

6. 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 证明: 若 V 的某个循环子空间可分解为两个 $\mathcal{A}$ -子空间的直和, 则这两个 $\mathcal{A}$ -子空间也是循环子空间.