

中国科学院大学线性代数(下)第十八次作业题
主讲老师: 李子明
助教: 杜昊, 郭婧

1. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

求正交矩阵 P 使得 $P^t A P$ 是对角矩阵, 并求 A^k (k 是正整数).

2. 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$. 证明: $A^t A = E$ 当且仅当 A 的列向量构成 \mathbb{R}^n 的一组单位正交基.

3. 设 V 是域 F 上的三维线性空间, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ 是 V 的一组基. 设 \mathcal{A} 是 V 上的线性算子, 它在 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ 下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

计算循环子空间 $F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}_3$ 的维数.

4. 设 $U, W \subseteq V$ 是子空间. 证明:

(i) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$;

(ii) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.

5. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 且 A 为正定矩阵, B 为非零斜对称矩阵.

证明: $\det(A + B) > \det(A)$.

6. 设 A, B 均为 n 阶实对称正定矩阵. 证明: 如果 $A - B$ 正定, 则 $B^{-1} - A^{-1}$ 亦正定.