# 中国科学院大学线性代数(下)第三次作业题
## 主讲老师: 李子明
## 助教: 杜昊, 郭婧

---

1. 设 $\vec{u}_1 = (1,1,1)^t$, $\vec{u}_2 = (1,1,2)^t$, $\vec{u}_3 = (1,2,3)^t \in \mathbb{R}^3$. 证明 $(\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3)$ 也是空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基底，并求向量 $\vec{x} = (6,9,14)^t$ 在这组基下的坐标.

2. 在 $\mathbb{R}^3$ 中，设

$$S = \begin{cases} \vec{u}_1 = (1,2,1)^t \\ \vec{u}_2 = (2,3,3)^t \\ \vec{u}_3 = (3,8,2)^t \end{cases}, \qquad S' = \begin{cases} \vec{v}_1 = (3,5,8)^t \\ \vec{v}_2 = (5,14,13)^t \\ \vec{v}_3 = (1,9,2)^t \end{cases}$$

   证明 $S$, $S'$ 均为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，并求由 $S$ 到 $S'$ 的转换矩阵.

3. 设 $F$ 是特征为零的域. $V = F^n$, $U_1 = \{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in V \mid x_1 + \ldots + x_n = 0\}$, $U_2 = \{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in V \mid x_1 = \ldots = x_n\}$. 证明 $U_1, U_2$ 为 $V$ 的子空间，并且 $V = U_1 \bigoplus U_2$.

4. 柯斯特利金-代数学引论（第二卷）第26页：1.

5. 设 $V$ 是有限维向量空间，$f, g \in V^*$ 且 $\ker(f) = \ker(g)$. 证明:

   (i) 若 $f \neq 0$，则 $\dim(\ker f) = \dim(V) - 1$;

   (ii) 必有某个纯量 $\lambda$ 使得 $g = \lambda f$.

   (注：柯斯特利金-代数学引论（第二卷）第26页：3)