

# 中国科学院大学线性代数(下)第七次作业题

主讲老师: 李子明

助教: 杜昊, 郭婧

1. (i) 化实二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 + 5x_3^2$  为标准型, 并写出线性替换.

(ii) 求实二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 - 3x_2x_3$  的签名.

2. 求实二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = x_1x_2 + x_3x_4 + \dots + x_{2n-1}x_{2n}$  的签名.

3. 设  $O_{n \times m}$  为域  $F$  上的  $n$  行  $m$  列零矩阵,

$$A = \begin{pmatrix} O_{n \times n} & O_{n \times m} \\ O_{m \times n} & A_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} O_{n \times n} & O_{n \times m} \\ O_{m \times n} & B_1 \end{pmatrix},$$

其中  $A_1, B_1 \in GL_m(F)$ . 证明:  $A \sim_c B$ , 当且仅当  $A_1 \sim_c B_1$ .

4. 设  $f(X) = X^tAX$  为实二次型, 且存在  $X_1, X_2$  使得  $f(X_1) > 0, f(X_2) < 0$ . 证明: 存在  $X_3 \neq \vec{0}$ , 使得  $f(X_3) = 0$ .

5. (思考) 设  $P \in F[x_1, \dots, x_n]$  为齐二次多项式,  $l_1, l_2 \in F[x_1, \dots, x_n]$  为齐一次多项式. 证明: 若  $P(x_1, \dots, x_n) = l_1(x_1, \dots, x_n)l_2(x_1, \dots, x_n)$ , 则  $\text{rank}(P) \leq 2$ .