中国科学院大学线性代数(下)第九次作业题
主讲老师: 李子明
助教: 杜昊, 郭婧

---

1. 设 F 是域, V, W 是 F 上的线性空间, $\vec{\nu}_1, \vec{\nu}_2, \vec{\nu}_3, \vec{\nu}_4$ 是 V 的一组基, $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3$ 是 W 的一组基. 设线性映射 ϕ 满足

$$\phi(\vec{\nu}_1) = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3, \quad \phi(\vec{\nu}_2) = -\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2, \quad \phi(\vec{\nu}_3) = 2\vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3, \quad \phi(\vec{\nu}_4) = \vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3.$$

求 ϕ 在 $\vec{\nu}_1, \vec{\nu}_2, \vec{\nu}_3, \vec{\nu}_4; \vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3$ 下的矩阵表示, $\mathrm{rank}(\phi)$ 和 $\dim(\ker(\phi))$.

2. 设

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathrm{M}_3(\mathbb{Q}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_3(\mathbb{Q}) \\ & A & \mapsto & A + A^t \end{array}$$

(i) 验证: ϕ 是线性算子.

(ii) 求 $\mathrm{rank}(\phi)$, $\dim(\ker(\phi))$.

3. 设 n 阶实对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 1 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3 & 3 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

求 A 的正惯性指数和负惯性指数.

4. 设 A 为正定矩阵. 求证: 对于 $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{Z}$, λA^k 是正定矩阵.