线性代数

第一章 代数的起源

§1 简谈代数

Kronecker: God made the integers. all else is the work of man.

$1, 2, 3, \ldots$

$0, 1, 2, 3, \ldots$

$\ldots -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

代数起源于解方程

一元一次方程: $ax=b$, a, b是整数 $a \neq 0$.

为了使该方程总有解: 引入有理数.

$x^2=2$ 引入~~有~~无理数

$x^2=-1$ 引入虚单位

正整数 → 自然数 → 整数 → 有理数 ①

→ 实数 → 复数.

一元二次方程

设 $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$

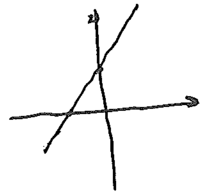
求解. 通过配方法可知

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

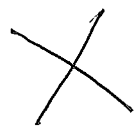
代数的内容: 把含有符号的表达式恒等变形为需要的形式.

二元一次方程

$y=2x+1$

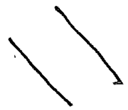


求解二元一次方程组 ⟺ 求$\overbrace{\text{直线}}^{\text{若干}}$的交点.



唯一解

至少两个解



无解

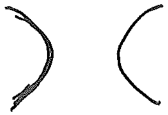
代数是可以书写的几何
几何是可以描绘的代数

二元二次方程

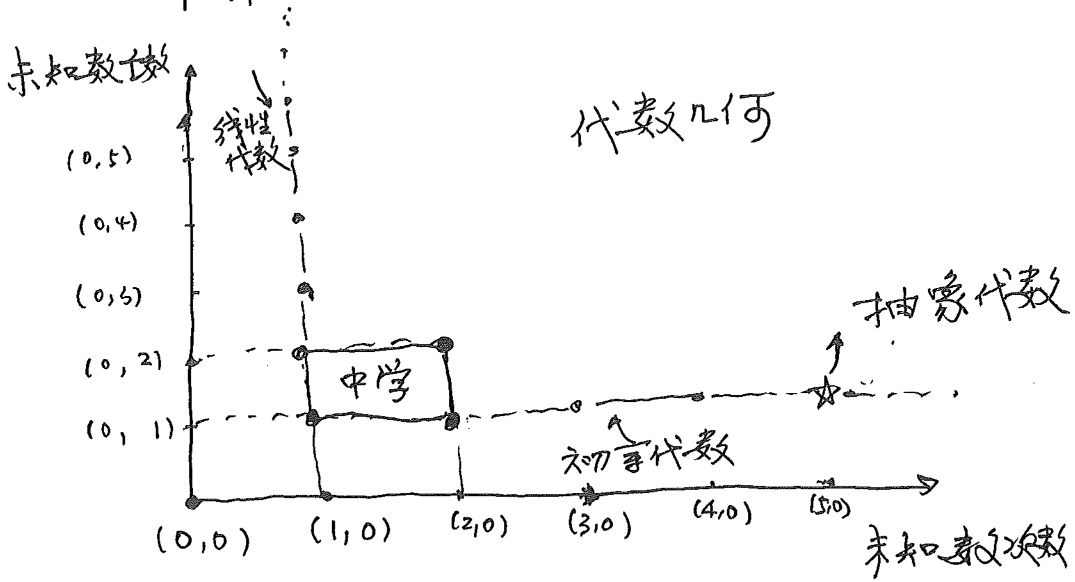
$$\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



求解二元二次方程
计算若干圆锥曲线(直线)的交点



例 (一元三次方程求解)

$$x^3=r \qquad x=\sqrt[3]{r}$$

求解 $ax^3+bx^2+cx+d=0,\ a\neq 0$

化简 1 (首一化)

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$$

⇒ 只要解

$$x^3+bx^2+cx+d=0$$

化简 2 (仿射技巧)

设 $x=y-\frac{b}{3}$

$$\left(y-\frac{b}{3}\right)^3+b\left(y-\frac{b}{3}\right)^2+c\left(y-\frac{b}{3}\right)+d=0$$

利用 $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

可得

$$y^3+py+q=0$$

其中 p, q 是数

化简了 令 $y = z - \frac{p}{3z}$

$$\left(z - \frac{p}{3z}\right)^3 + p\left(z - \frac{p}{3z}\right) + q = 0$$

$$z^3 - pz + \frac{p^2}{3z} - \frac{p^3}{27z^3} + p\left(z - \frac{p}{3z}\right) + q = 0$$

$$z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \quad (*)$$

(*) 称为 $y^3 + py + q = 0$ 的预解式 (resolvent)

通过求解 (*) 得 z^3

通过开立方求 z

从而得到 y，进而 x

Cardano 方法 (1545).

四次方程 Ferrari 预解式法

五次方程 ?

Lagrange (1770) 关于预解式的备忘录

Abel (1824) 一般五次方程无根式解

Galois (1830) 判定五次方程是否有根式解. 从而创立了 Galois 理论

例: $x^5 - x - 1 = 0$ 无根式解.

本学期的"非"线性代数内容

群, 环, 域. 一元多项式因式分解.

教学注意事项:

e-mail zmli@mmrc.iss.ac.cn

网页 www.mmrc.iss.ac.cn/~zmli

助教: 杜昊, 郭楚.

平时作业 30%

期中 30%

期末 40%

§2 线性方程组初步

设 $\alpha_1, \cdots \alpha_n$, β 是实数，$x_1, \cdots x_n$ 是未知数．线性方程是指

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta$$

线性方程组是指

$$(L) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_n \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

其中 a_{ij}, b_i 都是实数，$i=1,\cdots,m$, $j=1,\cdots,n$．称 (L) 是由 m 个线性方程，n 个未知数构成

§2.1 矩阵

令 $A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

称为 (L) 的系数矩阵

$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots, & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}, & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & \cdots & \cdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}, & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ 称为 L 的增广矩阵

关于矩阵的若干名词

A 有 m 行，n 列．称为 $m\times n$ 阶矩阵

如果 $m=n$，则 A 简称为 n 阶方阵

$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots a_{in})$ 称为 A 的第 i 个行(向量)

$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ 称为 A 的第 j 个列(向量)

它们分别记为 $\vec{A}_i$ 和 $\vec{A}^{(j)}$．于是

$$A = \begin{pmatrix} \vec{A}_1 \\ \vdots \\ \vec{A}_m \end{pmatrix} = \left(\vec{A}^{(1)}, \cdots, \vec{A}^{(n)}\right),$$

例D 求解 $\begin{cases} x+2y=3 & \cdots ① \\ 2x+3y=1 & \cdots ② \end{cases}$

② $-2\times$① $\quad -y=-5 \Rightarrow y=5$

把 $y=5$ 代入① $\quad x=-7 \Rightarrow \begin{cases} x=-7 \\ y=5 \end{cases}$

利用矩阵的语言 行 row, 列 column

方程组的增广矩阵

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2\times r_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)\times r_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x=-7 \\ y=5 \end{cases}$$

例U 求解 $\begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ 5x+4y+z=5 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2+r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 7 & 7 & 0 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{7}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\begin{cases} y-z=0 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y \\ y \text{ 任意} \\ z=5 \end{cases}$ 解不唯一

例I. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=1 \\ 4x_1-2x_2+5x_3=5 \\ 2x_1-x_2+4x_3=-1 \end{cases}$

求解.

解: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{r_2-2\times r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{r_3-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

由此得出 $0\cdot x_3 = 1$ $\rightarrow\leftarrow$

原方程组无解

定义: 如果(L)有解, 则称(L)是相容的 (consistent)

定义 如果(L)有唯一解, 则称(L)是确定的; 如果(L)相容且解不唯一, 则称(L)是不确定.

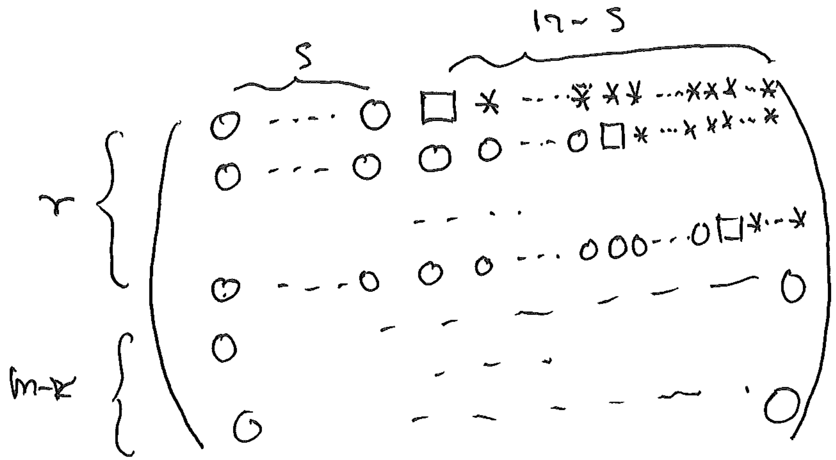
确定 determined.

例D是 determined, 例U是 undetermined

例I是 inconsistent.

§2.2 阶梯型矩阵 (echelon form)

设A是m×n阶矩阵. 称A是阶梯型的, 如果A具有以下形式.



□ 非零实数

* 任意实数

设 $1\leq k_1<k_2<\cdots<k_r\leq n$. 下列关于 $x_1,\cdots,x_n$ 线性方程组称为阶梯型，如果：

$$
(L)\quad
\begin{aligned}
a_{1k_1}x_{k_1}+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1\\
a_{2k_2}x_{k_2}+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2\\
&\cdots\\
a_{rk_r}x_{k_r}+\cdots+a_{rn}x_n&=b_r\\
0&=b_{r+1}\\
&\vdots\\
0&=b_m
\end{aligned}
$$

其中，$a_{1k_1},a_{2k_2},\cdots,a_{rk_2}$ 全不等于零.

称 $x_{k_1},x_{k_2},\cdots,x_{k_r}$ 为主未知元，其它未知数称为自由变元. 此时 (L) 的系数矩阵称为阶梯型的

引理 3.1 设线性方程组 (E) 由 (L) 中前 r 个方程组成. 则

(i) (E) 是相容的

(ii) 如果 $r<n$. 则 (E) 是不确定的

证：对 r 归纳. 当 $r=1$ 时，

$$(E_1)\quad a_{1k_1}x_{k_1}+a_{1,k_1+1}x_{k_1+1}+\cdots+a_{1n}x_n=b_1$$

$$x_{k_1}=\frac{1}{a_{1k_1}}(b_1-a_{1,k_1+1}x_{k_1+1}-\cdots-a_{1n}x_n)$$

$x_1,\cdots,x_{k_1-1},x_{k_1+1},\cdots,x_n$ 可取任意值.

于是 (E_1) 相容. 当未知数个数大于1时则 (E_1) 中有自由变元. 至少可以取两个值. 于是 (i) 和 (ii) 成立.

设 $\overset{r>1\text{时}}{}$(E) 由 r-1 个方程组成时引理成立. 考虑 (E) 由 r 个方程. 设 (E′) 由 (E) 中后 r-1 个方程组成. 则 (E′) 也是阶梯型做为 $x_{k_1+1},\cdots,x_n$ 的方程组

由归纳假设

(E′) 有解且当 $r<n-k_1$ 时 (E′) 不确定

设 $x_{k_1+1}=\alpha_{k_1+1},\ \cdots\ x_n=\alpha_n$ 是 (E′) 的一个解

则 $x_{k_1}=\frac{1}{a_{1k_1}}(b_1-a_{1,k_1+1}\alpha_{k_1+1}-\cdots-a_{1n}\alpha_n)$

由此可知 (E) 相容

如果 $r<n$，则

或者 $r<n-k_1$ 个，或者 $k_1>1$

前者说明 (E') 有至少两个解，于是 (E) 不确定

后者说明 x_1 在 (E) 中不出现，它可以取

任何值，从而 (E) 不确定 ☒

命题 2.1 设线性方程组 (L) 的增广矩阵

为

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & \cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

其中系数部分记为 A。

设系数矩阵 A 是阶梯型的，且 A 中非零

行共有 r 行。

则 (i) (L) 相容 $\iff$ $b_{r+1}=\cdots=b_m=0$

(ii) (L) 确定 $\iff$ $r=n$ 且 $b_{n+1}=\cdots=b_m=0$

证：(i) "$\Rightarrow$" 设 $x_1=\alpha_1, \cdots x_n=\alpha_n$ 是

(L) 的一组解，代入 (L) 的后 $m-r$ 个

方程得到 $0=b_{r+1}, \cdots, 0=b_n$

"$\Leftarrow$" 此时 (L) 与由 (L) 的前 r 个方程

组成的方程组 (L') 同解

由引理 2.1 (L') 相容 $\Rightarrow$ (L) 相容

(ii) "$\Rightarrow$" (L) 确定 $\Rightarrow$ (L) 相容 $\Rightarrow$ $b_{r+1}=\cdots=b_m=0$

假定 $r<n$ 时，上述构造的线性方程组

(L') 不确定 (∵引理 3.1)，$\rightarrow\leftarrow$

于是 $r=n$

"$\Leftarrow$" 因为 $r=n$，所以 (L') 为

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

其中 $a_{11}, a_{22}, \cdots a_{nn}$ 都非零

因为 $b_{n+1}=\cdots=b_m=0$，(L') 与 (L)

同解

因此只要证明(L')是确定即可

为此我们对n归纳. $n=1$

(L') $a_{11}x_1=b_1$. $a_{11}\neq 0$. $x_1=\frac{b_1}{a_{11}}$ 确定

设 n-1 时(L')确定. ~~则~~ 考虑(L')有n个未知数

设(L'')是由(L')中后n-1个方程关于 $x_2,\cdots x_n$

的线性方程组. 则由归纳假设(L'')

有唯一解 $x_2=\alpha_2,\ \cdots\ x_n=\alpha_n$.

由(L')中的第一个方程可知

$$x_1=\frac{1}{a_{11}}(b_1-a_{12}\alpha_2-\cdots-a_{1n}\alpha_n)$$

于是(L')的解唯一 $\Rightarrow$ (L)确定 ∎

例. (L):
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ ax_2+x_3=0 \\ x_3=b \end{cases}$$

讨论当a、b取何值时 (L)是相容的,

确定的.

解 (L)的增广矩阵是

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)$$

当 $a\neq 0$ 时 (L)确定

当 $a=0$, $b\neq 0$ 时 (L)不相容

当 $a=0$, $b=0$ 时.

(L)与以

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

为增广矩阵的方程组~~是偷~~同解.

于是(L)不确定

§2.3 Gauss 消去法

定义: 设(L)和(L')是两个关于 $x_1,\cdots,x_n$

的线性方程组. 如果或者(L)和(L')都相容且同解

或者(L)和(L')都不相容,

则称(L)与(L')等价

问题：给出（L），构造阶梯型方程组（E）使得（L）与（E）等价

三个基本变换：

(1) 把（L）中两个方程互换位置

(2) 把（L）中某个方程通乘以一个数加到另一个方程上

(3) 把（L）中某个方程通乘以一个非零常数

(1) 和 (3) 显然导致等价方程组

下面验证 (2) 也导致等价系统

设 (L)
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

我们把第一个方程通乘以加到第二个方程上

得到

$$(L') \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ (\alpha a_{11} + a_{21})x_1 + (\alpha a_{12} + a_{22})x_2 + \cdots + (\alpha a_{1n} + a_{2n})x_n = \alpha b_1 + b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

设 $x_1 = \beta_1, \ldots, x_n = \beta_n$ 是（L）的解

将该解代入（L'）的第二个方程

$$\sum_{j=1}^{n} (\alpha a_{1j} + a_{2j}) x_j = \alpha b_1 + b_2$$

$$\text{左边} = \sum_{j=1}^{n} (\alpha a_{1j} + a_{2j}) \beta_j = \sum_{j=1}^{n} (\alpha a_{1j}\beta_j + a_{2j}\beta_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha a_{1j}\beta_j + \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\beta_j$$

$$= \alpha \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\beta_j + \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\beta_j$$

$$= \alpha b_1 + b_2 = \text{右边}$$

验证完毕

三种规则的矩阵版.

设 B 是 (L) 的增广矩阵.

(1) $B = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vec{B_i} \\ \vdots \\ \vec{B_j} \\ \vdots \end{pmatrix} \longrightarrow B' = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vec{B_j} \\ \vdots \\ \vec{B_i} \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdots i \\ \\ \cdots j \end{array}$

(2) $B = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vec{B_i} \\ \vdots \\ \vec{B_j} \\ \vdots \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{B}' = \begin{pmatrix} \vec{B_i} \\ \vdots \\ \vec{B_j}+\alpha\vec{B_i} \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdots i \\ \\ \cdots j \end{array}$, $i \neq j$

(3) $B = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vec{B_i} \\ \vdots \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{B}' = \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha\vec{B_i} \\ \vdots \end{pmatrix}$ $\alpha \neq 0$

称为矩阵的三类初等行变换

定理 2.1 (Gauss 消去法)

设 (L) 是线性方程组. 我们可以有限次运用变换 (1) 和 (2) 得到阶梯型 ~~系统~~ 方程组 (L') 使得 (L) 与 (L') 等价

证: 设 (L) 的增广矩阵

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & \cdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

$\underbrace{\hphantom{a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn}}}_{A}$

对 m 归纳. 当 m=1 时, A 的阶梯型的
⇒ (L) 是阶梯型的.

设 (L) 由 m-1 个方程组成时, (L) 可以通过变换 (1), (2) 化为等价的阶梯型.

设 (L) 由 m 个方程组成. ~~由规则 1~~

如果 A 中的系数都为零, (L) 是阶梯型

设 A 中至少有一行非零. 由变换 (1)

可假设 ~~B 中~~ A 中第一行非零.

且 第一行中从左到右的一个非零元素为 a_{1s}. 且 A 中前 s-1 列都是零向量.

即 $B=\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \cdots & 0 & a_{1s}, & a_{1,s+1}, & \cdots a_{1,n} & b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2s} & a_{2,s+1}, & \cdots a_{2,n} & b_2 \\ & & & \cdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ms} & a_{m,s+1}, & \cdots a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$

其中 $a_{1s}\neq 0$

$B \xrightarrow{r_2-\frac{a_{2s}}{a_{1s}}r_1} \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \cdots & 0 & a_{1s}, & a_{1,s+1}, \cdots, & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a'_{2,s+1}, \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{3s}, & a_{3,s+1}, \cdots & a_{3n} & b_3 \\ & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ms} & a_{m,s+1}, \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

对第三行 … 第m行运用同样步骤

B 可利用变换(2)化为

$B'=\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \cdots & 0 & a_{1s}, & a_{1,s+1}, & \cdots a_{1n} & b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a'_{2,s+1}, & \cdots a'_{2,n} & b'_2 \\ & & & \cdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a'_{m,s+1}, & \cdots a'_{m,n} & b'_m \end{array}\right)$

令 (L^*) ~~对应~~ 是对应于 B' 去掉第一行得的矩阵为增广矩阵的线性方程组

由归纳假设 (L^*) 可通过(1),(2)化为阶梯型方程组 $(\bar{E}^*)$ 且 (L^*) 与等价

设 $(\bar{L})$ 为线性方程组

$$\begin{cases} a_{1s}x_s + a_{1,s+1}x_{s+1}+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \cancel{\bar{E}^*}\ \bar{L}^* \end{cases}$$

则 $(\bar{L})$ 是阶梯型

设 (L') 是以 B' 为增广矩阵的线性方程组

则 (L) 与 (L') ~~同解~~ 等价. ~~同解~~

~~(L') 与 (L̄) 同解~~

而 $(\bar{L}^*)$ 是 (L') 对后 $m-1$ 个方程运用(1),(2)得到. 于是 (L') 与 $(\bar{L})$ ~~同解~~ 等价. 从而

(L) 与 $(\bar{L})$ ~~同解~~ 等价. ∎

例 确定下列方程组是否相容和不确定

$$\begin{cases} 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = -5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_3 = 9 \\ 3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 = 15 \end{cases}$$

$$B = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1, r_2\text{互换}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2} r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 - 3r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ (L) 相容但不确定

例 设(L)是线性方程组，其中方程个数少于未知数个数．则(L)或者不相容或者不确定

证：设由定理2.1，(L)等价于一个阶梯型方程组(L')．(L')中非零行的个数r不大于方程的个数．从而r小于未知数．由~~命题2.1~~ (L) 不可能是确定的 □

或引理2.1(ii)