例：证明 不存在 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. 使得

$$AB - BA = E$$

证：设 $\exists A, B \in M_n(\mathbb{R})$ 使得上式成立

则 $tr(AB - BA) = tr(E) = n$

$$\underbrace{tr(AB) - tr(BA)}_{= 0} = n$$

$\rightarrow\leftarrow$. ☒

回忆：$M_n(\mathbb{R})$ 消去律不成立

但 如果 A 可逆．， $B, C \in \cancel{M_n(\mathbb{R})}\ \mathbb{R}^{m\times n}$

$$AB = AC \Rightarrow B = C$$

验证：$A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC)$

$$\Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \Rightarrow B = C.$$

同样．如果 $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$BA = CA \Rightarrow B = C.$$

$\boxed{\text{也可以利用满秩证明}}$

例：设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 可逆

则 A^t 可逆 且 $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

证：$(A^{-1})^t A^t = (AA^{-1})^t = E^t = E$

由 推论5.2 $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$ ☒

例：设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 且 $E + A$ 可逆

证明 $(E+A)^{-1}(E-A) = (E-A)(E+A)^{-1}$

证：由"消去律"．只要证

$$(E+A)\left[(E+A)^{-1}(E-A)\right] = (E+A)\left[(E-A)(E+A)^{-1}\right]$$

左 $= E - A$ 右 $= (E+A)(E-A)(E+A)^{-1}$

$$(E+A)(E-A) = E^2 - A^2 \quad (\because EA = AE)$$
$$= (E-A)(E+A)$$

右 $= E - A$

左 $=$ 右 ☒

定义：设 $A\in M_n(\mathbb{R})$. 如果 $k\in\mathbb{Z}^+$ 使得 $A^k = O$，则称A是幂零元

例 $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

例：设 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 幂零. 证明 $E-A$ 可逆

证：设 $A^k = O$

$k=1$. $A=O$ $\quad E-A=E$ 可逆

$k=2$ $A^2=O$ $\quad E=E-A^2=(E-A)(E+A)$

$(\because AE=EA)$

$\Rightarrow E-A$ 可逆

$k=3$ $A^3=O$ $\quad E=E-A^3=(E-A)(E+A+A^2)$

$\Rightarrow E-A$ 可逆

$$E=E-A^k=(E-A)(E+A+\cdots+A^{k-1})$$

$\Rightarrow E-A$ 可逆.

例：设 $A\in\mathbb{R}^{m\times s}$, $B\in\mathbb{R}^{s\times n}$

证明：如果 $AB=O_{m\times n}$, 则

$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)\leq s$

证：法1 (Sylvester's inequality)

$O=\operatorname{rank}(AB)\leq\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)-s$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)\leq s$

法2 Ker + im

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "\varphi_B"] \arrow[dr, "\varphi_{AB}"'] & \mathbb{R}^s \arrow[d, "\varphi_A"] \\ & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

$\varphi_{AB} = O$

$\forall \vec{x}\in\mathbb{R}^n$

$\varphi_A(\varphi_B(\vec{x}))=\vec{0}_m$

$\Rightarrow \operatorname{im}(\varphi_B)\subset\ker(\varphi_A)$

$\Rightarrow \operatorname{rank}B\leq\dim\ker(\varphi_A)$

$=s-\operatorname{rank}(A)$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)\leq s$ ∎

更正：推论5.2 设 $A_1\cdots A_k\in M_n(\mathbb{R})$ 可逆

则 $A_1\cdots A_k$ 也可逆，且 $(A_1\cdots A_k)^{-1}=A_k^{-1}\cdots A_1^{-1}$

证：$$\underbrace{A_k^{-1}\cdots A_1^{-1}}_{B}\,A_1\cdots A_k=A_k^{-1}\cdots A_2^{-1}\underbrace{(A_1^{-1}A_1)}_{E}A_2\cdots A_k$$

$$=A_k^{-1}\cdots(A_2^{-1}A_2)\cdots A_k=\cdots=E$$

$$\Rightarrow\quad B=(A_1\cdots A_k)^{-1}\quad\text{（推论5.1）}.$$

§6 矩阵的初等等价

引理6.1（利用矩阵乘法表示Gauss消去法）

设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 则存在可逆方阵 $P\in M_m(\mathbb{R})$

使得 (i) P是若干m阶初等矩阵之积

(ii) PA 是阶梯型

$$\left(\begin{array}{cccccc} 0\cdots0 & 1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0\cdots0 & 0\cdots0 & 1 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0\cdots0 & & & & 1 & * \\ 0\cdots0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0\cdots0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{array}\right)\Big\}r$$

证：由 Gauss 消去法和初等方阵的性质 ①

存在有限个第一类和第二类初等方阵

$P_1,\cdots P_k$ 使得

$$\underbrace{(P_k\cdots P_1)}_{P'}A=\left(\begin{array}{cccccc} 0\cdots0 & \alpha_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0\cdots0 & & \alpha_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \ddots & \alpha_r & * \\ 0\cdots0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0\cdots0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0\cdots0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{array}\right)\Big\}r$$

$\alpha_1,\cdots\alpha_r\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. 于是存在~~初等~~若干第三类初等方阵. $P_{k+1},\cdots P_{k+r}$

使得

$$(P_{k+r}\cdots P_{k+1})\,P'A=\left(\begin{array}{cccccc} 0\cdots0 & 1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0\cdots0 & 0 & \cdots 0 & 1 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & 0 & \cdots & \cdots 0 & 1 & * \\ 0\cdots0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0\cdots0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0\cdots0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

令 $P=P_{k+r}\cdots P_{k+1}P'$ 因为每个初等方阵都可逆. 所以 P 可逆（推论5.2）

例 设 $$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

利用左乘初等方阵把A化为阶梯型.

$$F_{21}(-2)A=\begin{pmatrix}2&-1&3&1\\0&0&-1&3\\2&-1&4&-1\end{pmatrix}$$

$$F_{31}(-1)F_{21}(-2)A=\begin{pmatrix}2&-1&3&1\\0&0&-1&3\\0&0&1&-2\end{pmatrix}$$

$$F_{23}F_{31}(-1)F_{21}(-2)A=\begin{pmatrix}2&-1&3&1\\0&0&1&-2\\0&0&-1&3\end{pmatrix}$$

$$F_{32}(1)F_{31}(-1)F_{21}(-2)A=\begin{pmatrix}2&-1&3&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{F_1(\tfrac{1}{2})F_{32}(1)F_{31}(-1)F_{21}(-2)}_{P}A=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

PA ~~右~~乘若干4阶初等方阵 $Q_1\cdots Q_k$

$$PAQ_1\cdots Q_k=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_3&0\end{pmatrix}$$

引理6.2 （矩阵打洞） ②

设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 则存在 $P\in M_m(\mathbb{R})$, $Q\in M_n(\mathbb{R})$

使得 (i) P 是若干 m 阶初等方阵之积

(ii) Q ······ n 阶 ······

(iii) $PAQ=\begin{pmatrix}E_r&O_{r\times(n-r)}\\O_{(m-r)\times r}&O_{(m-r)\times(n-r)}\end{pmatrix}$

其中 $r=\operatorname{rank}(A)$

证：由引理6.1

$$PA=\left(\begin{array}{ccccc}0\cdots0&1&&&\\0&\cdots&1&&\\0&\cdots&&1&\\0\cdots0&&&&0\\0\cdots0&&&&0\end{array}\right)_{m\times n}\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\}r\\ \\ \end{array}$$

其中 $r=\operatorname{rank}(A)$

通过列互换

$$PAQ_1=\begin{pmatrix}\begin{matrix}1&&*\\&\ddots&\\&&1\end{matrix}&O\\O&O\end{pmatrix}_{m\times n}$$

其中 Q_1 是若干第一类 n 阶初等方阵

由列Gauss消去可知 存在若干 $Q_2 \in M_n(\mathbb{R})$

$$PAQ_1Q_2 = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$ #

其中 Q_2 是若干第二类 n阶初等方阵之积

令 $Q = Q_1Q_2$ 即可.

~~例~~ 定理6.1 设 $H \in M_n(\mathbb{R})$, 则

H 可逆 $\Leftrightarrow$ H是若干n阶初等方阵之积

证: "$\Leftarrow$" 推论5.2

"$\Rightarrow$" 由引理6.2 $\exists P, Q \in M_n(\mathbb{R})$ 可逆

使得 $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{n\times n}$, 其中 $\mathrm{rank}(A)=r$

$\because$ A可逆 $\therefore$ $\mathrm{rank}(A) = n$. 于是

$$PAQ = E$$

即 $A = P^{-1}EQ^{-1} = P^{-1}Q^{-1}$

由引理6.2 P, Q 都是初等矩阵之积 ⑤

由推论5.2 P^{-1}, Q^{-1} ……… 的逆之积

由初等矩阵逆的性质

$$F_{ij}F_{ij} = E,\quad F_{ij}(\alpha)F_{ij}(-\alpha) = E,\quad F_i(\alpha)F_i(\tfrac{1}{\alpha}) = E$$

可知: 初等矩阵的逆还是初等矩阵

于是 $A = P^{-1}Q^{-1}$ 也是初等矩阵之积 □

定义: 设 $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 如果存在可逆方阵

$P \in M_m(\mathbb{R})$, $Q \in M_n(\mathbb{R})$ 使得 $B = PAQ$

则称 A 和 B 初等等价(相抵) 记为

$$A \sim_e B$$

验证 "$\sim_e$" 是等价关系

自反: $A = E_m A E_n$

对称: 设 $A \sim_e B$ 则 $B = PAQ$

$\Rightarrow P^{-1}BQ^{-1} = A \Rightarrow B \sim_e A$

传递：设 $A \sim_e B$，$B \sim_e C$ 则

$\exists\, P, R \in M_m(\mathbb{R})$，$Q, S \in M_n(\mathbb{R})$

使得 $B = PAQ$ $\quad C = RBS$

$$C = (RP)A(QS)$$

RP, QS 可逆（推论5.2）

$$\Rightarrow A \sim_e C$$

$\boxed{}$

定理6.2 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. $r = \mathrm{rank}(A)$

则 $A \sim_e \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$

证：引理6.2 的直接推论.

推论6.1 设 $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 则

$$A \sim_e B \Longleftrightarrow \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$$

证：$A \sim_e B \Rightarrow \exists\, P \in M_m(\mathbb{R})$，$Q \in M_n(\mathbb{R})$

使得 $A = PBQ$

$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$ [

[矩阵乘以满秩方阵秩不变]

"$\Leftarrow$" 由定理6.2.

$A \sim_e \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$，$B \sim_e \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$

$\boxed{}$

$$\Rightarrow A \sim_e B.$$

推论6.2 $\mathbb{R}^{m\times n}/\sim_e$ 共有 $\min(m,n)+1$ 个等价类，它们的代表元分别为

$$O_{m\times n},\quad \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n},\ r = 1, 2, \ldots, \min(m,n)$$

证 由定理6.2 和 $\mathrm{rank}(A) \leq \min(m,n)$ 可得 $\boxed{}$

§7 方阵求逆

问题：给定 $A \in M_n(\mathbb{R})$

(i) 判断 A 是否可逆？ ✓

(ii) 如果 A 可逆，计算 A^{-1} (?).

引理7.1. 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times s}$, $B\in\mathbb{R}^{s\times n}$

则 $AB=\begin{pmatrix}\vec{A}_1B\\ \vdots\\ \vec{A}_mB\end{pmatrix}=(A\vec{B}^{(1)},\dots,A\vec{B}^{(n)})$

证：设 $C=(c_{ij})_{m\times n}=AB$

$G=(g_{ij})=\begin{pmatrix}\vec{A}_1B\\ \vdots\\ \vec{A}_mB\end{pmatrix}$

$H=(h_{ij})=(A\vec{B}^{(1)},\dots A\vec{B}^{(n)})$

$g_{ij}=\cancel{\boxed{(\vec{A}_iB)_j\neq\vec{A}_i}}$ $\vec{A}_iB$中第j个元素

$=\vec{A}_i\vec{B}^{(j)}=c_{ij}$

$h_{ij}=A\vec{B}^{(j)}$中第i个元素$=\vec{A}_i\vec{B}^{(j)}=c_{ij}$

引理7.2 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times s}$, $B\in\mathbb{R}^{s\times n}$

(i) 设 $A=\begin{pmatrix}A'\\ A''\end{pmatrix}$ $A'\in\mathbb{R}^{m'\times s}$, $A''\in\mathbb{R}^{m''\times s}$

$m'+m''=s$

则 $AB=\begin{pmatrix}A'B\\ A''B\end{pmatrix}$

(ii) 设 $B=(B',B'')$ $B'\in\mathbb{R}^{s\times n'}$, $B''\in\mathbb{R}^{s\times n''}$

则：$AB=(AB',AB'')$

证：设 $A'=\begin{pmatrix}\vec{A}_1\\ \vdots\\ \vec{A}_k\end{pmatrix}$ $A''=\begin{pmatrix}\vec{A}_{k+1}\\ \vdots\\ \vec{A}_m\end{pmatrix}$

$A'B=\begin{pmatrix}\vec{A}_1B\\ \vdots\\ \vec{A}_kB\end{pmatrix}$, $A''B=\begin{pmatrix}\vec{A}_{k+1}B\\ \vdots\\ \vec{A}_mB\end{pmatrix}$, (引理7.1)

$\begin{pmatrix}A'B\\ A''B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{A}_1B\\ \vdots\\ \vec{A}_kB\\ \vec{A}_{k+1}B\\ \vdots\\ \vec{A}_mB\end{pmatrix}=AB$ (引理7.1)

设 $B'=(\vec{B}^{(1)},\dots,\vec{B}^{(k)})$, $B''=(\vec{B}^{(k+1)},\dots,\vec{B}^{(n)})$

$(AB',AB'')=(A\vec{B}^{(1)},\dots A\vec{B}^{(k)},A\vec{B}^{(k+1)},\dots A\vec{B}^{(n)})$

$=AB$ (引理7.1) ∎

给定 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 求 A^{-1}

(1) 设 $B=(A, E)$

(2) 利用初等行变换把 A 化为 E

$$P_k\cdots P_1 A = E \Rightarrow P_k\cdots P_1 = A^{-1}$$

$$P_k\cdots P_1 B = P_k\cdots P_1 (A, E)$$

$$= (P_k\cdots P_1 A, \ P_k\cdots P_1)$$

$$= (E, \ P_k\cdots P_1)$$

例：设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 求 A^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_{12}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_{31}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_{13}(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_{12}(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

设 $A\in M_n(\mathbb{R})$

如果 $\exists\, \alpha_0, \alpha_1, \cdots \alpha_k \in \mathbb{R}$. $\alpha_k\alpha_0 \neq 0$

使得 $\alpha_0 E + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_k A^k = O$

则 $-\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}E+\cdots+\frac{\alpha_k}{\alpha_0}A^{k-1}\right)A=E$

$$\Rightarrow \quad A^{-1}=-\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}E+\frac{\alpha_2}{\alpha_0}A+\cdots+\frac{\alpha_k}{\alpha_0}A^{k-1}\right)$$

例：设 $A_n=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1\\ & & \cdots & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1\end{pmatrix}$

问 A_n 是否可逆. ~~如果是~~ 求 A_n^{-1}, $n\geq 2$

解 $A_n^0=E$, $A_n^1=A_n$

$$A_n^2=\begin{pmatrix}-1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & -1 & \cdots & 1\\ & & \cdots & \\ 1 & 1 & \cdots & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & -1 & \cdots & 1\\ & & \cdots & \\ 1 & 1 & \cdots & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}n & n-4 & \cdots & n-4\\ n-4 & n & \cdots & n-4\\ & & \ddots & \\ n-4 & n-4 & \cdots & n\end{pmatrix}$$

$$=nE+(n-4)\begin{pmatrix}0 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & \cdots & 1\\ & & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

$$=nE_n+(n-4)A_n+(n-4)E_n$$

$$A_n^2-(n-4)A_n=(2n-4)E_n$$

$$\frac{1}{2n-4}\left(A_n-(n-4)E\right)A_n=E_n$$

$\Rightarrow$ 当 $n\neq 2$ 时 $A_n^{-1}=A_n-(n-4)E$

当 $n=2$ 时 $A_2=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ $\operatorname{rank}(A_2)=1$. 不可逆.

§8 矩阵分块~~其~~及应用

(p 83. 习题 17)

引理 8.1 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times s}$, $B\in\mathbb{R}^{s\times n}$

则 (i) $AB=\begin{pmatrix}A_1B\\ \vdots\\ A_pB\end{pmatrix}=(AB_1,\cdots,AB_q)$

(ii) $AB=(A_iB_j)_{\substack{i=1,\cdots,p\\ j=1,\cdots,q}}$

证：(i) 不妨设 $p>1$，$p=2$ 时是引理 7.2

设 $p-1$ 时成立 ~~由引理 7.2~~ $AB=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_{p-1}\end{pmatrix}\\ A_p\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_{p-1}\end{pmatrix}B\\ A_pB\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} A_1 B \\ \vdots \\ A_{p-1} B \\ A_p B \end{pmatrix} \quad (\because 归纳假设) \quad \square$$

同理 $AB = A(B_1, \cdots B_q) = (AB_1, \cdots AB_q)$

(ii) $$AB = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \vdots \\ A_p B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 (B_1, \cdots, B_q) \\ \vdots \\ A_p (B_1, \cdots B_q) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 B_1, & \cdots, & A_1 B_q \\ A_p B_1, & \cdots, & A_p B_q \end{pmatrix}. \quad \square$$

<u>引理 8.2</u> 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times s}$, $B \in \mathbb{R}^{s \times n}$

设 $A = (A_1, \cdots, A_p)$ 其中 $A_i \in \mathbb{R}^{m \times s_i}$

$i = 1, \cdots, p$

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_p \end{pmatrix}, \text{其中 } B_i \in \mathbb{R}^{s_i \times n}, \ i = 1, \cdots p$$

则 $AB = A_1 B_1 + \cdots + A_p B_p$

<u>证:</u> 注意 如果

$$\lambda = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \cdots + \alpha_s \beta_s$$
$$= (\alpha_1 \beta_1 + \cdots + \alpha_{s_1} \beta_{s_1}) + (\alpha_{s_1+1} \beta_{s_1+1} + \cdots + \alpha_{s_1+s_2} \beta_{s_1+s_2})$$
$$+ \cdots + (\alpha_{s_1+\cdots+s_{p-1}+1} \beta_{s_1+\cdots+s_{p-1}+1} + \cdots + \alpha_{s_1+\cdots+s_p} \beta_{s_1+\cdots+s_p})$$

其中 $s_1 + \cdots + s_p = s$

$$= (\alpha_1, \cdots \alpha_{s_1}) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{s_1} \end{pmatrix} + \cdots + (\alpha_{s_1+\cdots+s_{p-1}+1}, \cdots, \alpha_{s_1+\cdots+s_p}) \begin{pmatrix} \beta_{s_1+\cdots+s_{p-1}+1} \\ \vdots \\ \beta_{s_1+\cdots+s_p} \end{pmatrix}$$

设 $C = (c_{ij})_{m \times n} = AB$

$C^{(l)} = (c_{ij}^{(l)})_{m \times n} = A_l B_l$

$$c_{ij} = \vec{A_i} \vec{B_j} = (\vec{A_1})_i (\vec{B_1})^{(j)} + \cdots + (\vec{A_p})_i (\vec{B_p})^{(j)}$$
$$= c_{ij}^{(1)} + \cdots + c_{ij}^{(p)}$$
$$\Rightarrow C = A_1 B_1 + \cdots + A_p B_p$$

定理8.1 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times s}$, $B\in\mathbb{R}^{s\times n}$

$A=(A_{ik})_{\substack{i=1,\cdots,p\\k=1,\cdots,h}}$ 其中 $A_{ik}\in\mathbb{R}^{m_i\times s_k}$

$m_1+\cdots+m_p=m$ $s_1+\cdots+s_h=s$

$B=(B_{kj})_{\substack{k=1,\cdots,h\\j=1,\cdots,q}}$ 其中 $B_{kj}\in\mathbb{R}^{s_k\times n_j}$

$n_1+\cdots+n_q=n$

则 $AB=(C_{ij})_{\substack{i=1,\cdots,p\\j=1,\cdots,q}}$ $C_{ij}\in\mathbb{R}^{m_i\times n_j}$

$$C_{ij}=A_{i1}B_{1j}+\cdots+A_{ih}B_{hj}.$$

证: 设 $A_i=(A_{i1},A_{i2},\cdots A_{ih})$

$$B_j=\begin{pmatrix}B_{1j}\\B_{2j}\\\vdots\\B_{hj}\end{pmatrix}$$

$i=1,\cdots p.$ $j=1,\cdots q$

$$AB=\begin{pmatrix}A_1\\\vdots\\A_p\end{pmatrix}(B_1,\cdots B_q)$$

$$=(A_iB_j)_{\substack{i=1,\cdots p\\j=1,\cdots q}}$$ 引理8.1.(ii)

$$A_iB_j=(A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{ih})\begin{pmatrix}B_{1j}\\B_{2j}\\\vdots\\B_{hj}\end{pmatrix}$$

$$=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\cdots+A_{ih}B_{hj}.\ \square$$

例 $A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}$

$A_{11}\in\mathbb{R}^{m_1\times s_1}$, $A_{12}\in\mathbb{R}^{m_1\times s_2}$

$A_{21}\in\mathbb{R}^{m_2\times s_1}$ $A_{22}\in\mathbb{R}^{m_2\times s_2}$

$B_{11}\in\mathbb{R}^{s_1\times n_1}$ $B_{12}\in\mathbb{R}^{s_1\times n_2}$

$B_{21}\in\mathbb{R}^{s_2\times n_1}$ $B_{22}\in\mathbb{R}^{s_2\times n_2}$

$$AB=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}, & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}\\A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}, & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}\end{pmatrix}$$

例 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{k\times l}$.

$U\in M_m(\mathbb{R})$, $V\in M_k(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix}U&O\\O&V\end{pmatrix}_{(m+k)\times(m+k)}\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}_{(m+k)\times(n+l)}$$

$$=\begin{pmatrix}U&O\\O&V\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}UA&O\\O&VB\end{pmatrix}$$

同理 $\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U'&O\\O&V'\end{pmatrix}_{(n+l)\times(n+l)}$

$U'\in M_n(\mathbb{R})$, $V'\in M_l(\mathbb{R})$

等于 $\begin{pmatrix}AU&O\\O&BV\end{pmatrix}$

例：设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $X\in\mathbb{R}^{n\times m}$, 其中 $X=(x_{ji})_{n\times m}$

x_{ji} 未知. 证明

$$AXA=A \quad \text{有解}.$$

证： $A=P\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}Q$. $r=\operatorname{rank}(A)$

$P\in M_m(\mathbb{R})$, $Q\in M_n(\mathbb{R})$ 可逆 (~~定理~~引理6.2)

$$P\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}QXP\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}Q$$

$$\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}Z\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}$$

其中 $Z=QXP$

$$\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}_{m\times n}\begin{pmatrix}Z_{11}&Z_{12}\\Z_{21}&Z_{22}\end{pmatrix}_{n\times m}\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}_{m\times n}$$

$$=\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}_{m\times n}$$

$Z_{11}\in\mathbb{R}^{r\times r}$ $\quad$ $Z_{12}\in\mathbb{R}^{r\times(m-r)}$

$Z_{21}\in\mathbb{R}^{(n-r)\times r}$ $\quad$ $Z_{22}\in\mathbb{R}^{(n-r)\times(m-r)}$

$$\begin{pmatrix}Z_{11}&Z_{12}\\O&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}Z_{11}&O\\O&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\cancel{Z_{11}=O}$ $\quad Z_{11}=E_r$

Z_{12}, Z_{21}, Z_{22} 任意

$$X=Q^{-1}ZP^{-1}=Q^{-1}\begin{pmatrix}E_r&Z_{12}\\Z_{21}&Z_{22}\end{pmatrix}P^{-1} \quad \square$$

$Z_{12}\in\mathbb{R}^{r\times(m-r)}$ $\quad$ $Z_{22}\in\mathbb{R}^{(n-r)\times(m-r)}$

$Z_{21}\in\mathbb{R}^{(n-r)\times r}$

任意矩阵

回忆若干秩的等式和不等式

设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{k\times l}$

(i) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}\overset{\text{rank}}{=}\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$

(ii) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A&C\\O&B\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A&O\\D&B\end{pmatrix}\geq\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$

例：设 $A, B\in\mathbb{R}^{m\times n}$

证明：$\operatorname{rank}(A+B)\leq\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$

证：设 $C=\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}_{(2m\times 2n)}$ $\cancel{(m+n)\times 1}$

$$C=\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}A&O\\A&B\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix}A&O\\A+B&B\end{pmatrix}=D$$

$$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)=\operatorname{rank}(C)=\operatorname{rank}(D)\geq\operatorname{rank}(A+B)$$

例：设 $A\in\mathbb{R}^{m\times s}$，$B\in\mathbb{R}^{s\times n}$

证明：(i) $\mathrm{rank}(AB)\le\min(\mathrm{rank}(A),\mathrm{rank}(B))$

(ii) $\mathrm{rank}(AB)\ge\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)-s$

证：(i) $C:=AB=(A\vec{B}^{(1)},\cdots A\vec{B}^{(n)})$

$\because A\vec{B}^{(j)}\in V_c(A)$, $j=1..n$

$\therefore V_c(C)\subset V_c(A)$

$\left[\, A\vec{B}^{(j)}=(\vec{A}^{(1)},\cdots\vec{A}^{(s)})\begin{pmatrix}b_{1j}\\ \vdots\\ b_{sj}\end{pmatrix}=b_{1j}\vec{A}^{(1)}+\cdots+b_{sj}\vec{A}^{(s)}\,\right]$

$\Rightarrow \mathrm{rank}(C)\le\mathrm{rank}(A)$

$C:=\begin{pmatrix}\vec{A}_1B\\ \vdots\\ \vec{A}_mB\end{pmatrix}$ $\because \vec{A}_iB\in V_r(B)$

$\therefore V_r(C)\subset V_r(B)$

$\left[\, \vec{A}_iB=(a_{i1},\cdots a_{is})\begin{pmatrix}\vec{B}_1\\ \vdots\\ \vec{B}_s\end{pmatrix}=a_{i1}\vec{B}_1+\cdots+a_{is}\vec{B}_s\,\right]$

$\Rightarrow \mathrm{rank}(C)\le\mathrm{rank}(B)$ □

4

(ii) $C=\begin{pmatrix}E_s & O\\ O & AB\end{pmatrix}_{(s+m)\times(s+n)}$

$D=\begin{pmatrix}E_s & O\\ A & E_m\end{pmatrix}C$

$=\begin{pmatrix}E_s & O\\ A & E_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_s & O\\ O & AB\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}E_s & O\\ A & AB\end{pmatrix}$

$D\begin{pmatrix}E_s & -B\\ O & E_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_s & O\\ A & AB\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_s, & -B\\ O & E_n\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}E_s & -B\\ A & O\end{pmatrix}=:F$

$\mathrm{rank}(C)\ge\mathrm{rank}(F)\ge\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}$

$\mathrm{rank}(C)=s+\mathrm{rank}(AB)$.

例 (Sylvester 等式). 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$

试证明: $\mathrm{rank}(E_m-AB)+n=\mathrm{rank}(E_n-BA)+m$

证: $C=\begin{pmatrix}E_n & O\\ O & E_m-AB\end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}E_n & O\\ A & E_m\end{pmatrix}}_{P_1}C=\begin{pmatrix}E_n & O\\ A & E_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_n & O\\ O & E_m-AB\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}E_n & O\\ A & E_m-AB\end{pmatrix}=:D$$

$$D\underbrace{\begin{pmatrix}E_n & B\\ O & E_m\end{pmatrix}}_{P_2}=\begin{pmatrix}E_n & O\\ A & E_m-AB\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_n & B\\ O & E_m\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}E_n & B\\ A & E_m\end{pmatrix}=:F$$

$$\cancel{\begin{pmatrix}E_n & O\\ -A & E_m\end{pmatrix}F=\begin{pmatrix}E_n & O\\ -A & E_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_n & B\\ A & E_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_n & \\ & \end{pmatrix}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}E_n & -B\\ O & E_m\end{pmatrix}}_{P_3}F=\begin{pmatrix}E_n & -B\\ O & E_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_n & B\\ A & E_m\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}E_n-BA & O\\ A & E_m\end{pmatrix}=:G$$

$$G\begin{pmatrix}E_n & O\\ -A & E_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_n-BA & O\\ A & E_m\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}E_n & O\\ -A & E_m\end{pmatrix}}_{P_4}$$

$$=\begin{pmatrix}E_n-BA & O\\ O & E_m\end{pmatrix}=:H$$

由阶梯型矩阵可知 P_1, P_2, P_3, P_4 都满秩. $\Rightarrow \mathrm{rank}(C)=\mathrm{rank}(H)$ ☐

例：设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$，$AB=BA$

证明 $\operatorname{rank}(A+B)+\operatorname{rank}(AB) \geq \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$

如何用矩阵分块做.

注二：

解方程组 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$A\vec{x}=\vec{0},\quad A\vec{x}=\vec{b}$$

$$A\vec{x}=\vec{0} \iff \vec{x}\in \ker(\varphi_A)$$

$$A\vec{x}=\vec{b} \text{ 有解} \iff \vec{b}\in \operatorname{im}(\varphi_A)$$

φ_A 是满射 $\iff \operatorname{rank}(A)=m$

$\iff \forall\, \vec{b}\in\mathbb{R}^m$，$A\vec{x}=\vec{b}$ 有解

$\iff \operatorname{rank}(A\,|\,\vec{b})=\operatorname{rank}(A)=m$

当 $m=n$ 时 且 A 可逆

$$A\vec{x}=\vec{b} \qquad \vec{x}=A^{-1}\vec{b}$$

解存在且唯一

注三：设 $L\subset\mathbb{R}^n$ 中是线性流型

则 L 是某个方程组

$A\vec{x}=\vec{b}$ 的解.

证：设 $L=\vec{v}+V$

其中 $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$，$V\subset\mathbb{R}^n$ 是子空间

则 存在 矩阵 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，其中 $m=n-\dim V$

使得. V 是 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的解空间

设 $A\vec{v}=\vec{b}$

考虑：$\vec{u}\in L$ 则 $\vec{u}=\vec{v}+\vec{w}$，$\vec{w}\in V$

$$A\vec{u}=A(\vec{v}+\vec{w})=A\vec{v}+A\vec{w}=\vec{b}$$

$\Rightarrow$ $\vec{u}$ 是 L 的解.

<u>反之</u> 设 $\vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix}$ 是 L 的一个解

则 $A(\vec{u}-\vec{v}) = A\vec{u}-A\vec{v} = \vec{b}-\vec{b} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{u}-\vec{v} \in V_A \Rightarrow \exists\, \vec{w} \in V_A = V$

使得 $\vec{u} = \vec{v}+\vec{w} \in L$ ▨