回忆：

$$V_n = \left|\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1, & \cdots, & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2, & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ & & \cdots & \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{A_n}\right| = \prod_{1\le i<j\le n} (\alpha_j - \alpha_i)$$

Vandemonde 行列式的来源.

$f(x) = f_0 + f_1 x + \cdots + f_d x^d$，其中 $f_0, f_1 \cdots f_d \in \mathbb{R}$

$f_d \neq 0$. 称 $f(x)$ 是 ~~实数~~ 关于 x 的实系数多项式

次数为 d

设 $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad f(\alpha) = f_0 + f_1\alpha + \cdots + f_d \alpha^d \in \mathbb{R}$

设 $f(x) = f_0 + f_1 x + \cdots + f_{n-1} x^{n-1}$，其中

实系数 $f_0, f_1, \cdots f_{n-1}$ 未知.

设 $\alpha_1, \cdots \alpha_n \in \mathbb{R}$.

如果已知 $f(\alpha_i) = \beta_i$, $i = 1, 2, \cdots n$

如何确定 $f_0, f_1, \cdots f_{n-1}$

①

$$f_0 + f_1 \alpha_i + \cdots + f_{n-1}\alpha_i^{n-1} = \beta_i, \quad i = 1, 2, \cdots n$$

即：$(1, \alpha_i, \cdots \alpha_i^{n-1}) \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = \beta_i$.

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{(A_n)_i} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = \beta_i$$

$$\Rightarrow (L) \quad A_n \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

V_n 是 (L) 系数矩阵的行列式

求解 (L) 称为多项式插值 (interpolation)

由 V_n 的表达式可知：

当 $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ 两两不同时

$\det(V_n) \neq 0 \Rightarrow A_n$ 可逆 (定理1.2)

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = A_n^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$ 即 $f_0, f_1 \cdots f_{n-1}$ 存在且唯一.

例 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 斜对称

证明：当 n 是奇数时，A 不满秩

证：由定理1.2，只要证明 $\det(A)=0$

$$A^t=-A \Rightarrow \det(A^t)=\det(-A)=(-1)^n\det(A)$$

$$=-\det(A) \quad (\because n\text{是奇数})$$

由定理1.1 $\det(A)=-\det(A)$

$$\Rightarrow 2\det(A)=0 \Rightarrow \det(A)=0$$

$(\because 2\neq 0)$

§2.2 乘法定理

定理2.2 设 $A\in M_m(\mathbb{R})$, $B\in M_n(\mathbb{R})$

$C\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 则

$$\det\underbrace{\begin{pmatrix} A & C \\ O & B\end{pmatrix}_{(m+n)\times(m+n)}}_{D}=\det(A)\det(B)$$

证：矩阵法：设 $A=(a_{ij})_{m\times m}$

对 m 归纳：$m=1$

$$\det\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & c_1,\dots & c_n \\ 0 & & \\ \vdots & & B \\ 0 & & \end{pmatrix}}_{D}=a_{11}\det(B)$$

(定理2.1，中的 $i=2$)

$$\Rightarrow \det(D)=\det(A)\det(B)$$

设 $A\in M_{m-1}(\mathbb{R})$ 时定理成立

当 $A\in M_m(\mathbb{R})$ 时

$$\det(D)=\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & C \\ & \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & \\ & O & & & B\end{pmatrix}$$

按第一列展开得

$$\det(D)=a_{11}D_{11}+\cdots+a_{m1}D_{m1}+0D_{m+1,1}+\cdots+0D_{m+n,1}$$

$=a_{11}D_{11}+\cdots+a_{m1}D_{m1}$ （其中 D_{ij} 是 D 的代数余子式）

$=a_{11}A_{11}\det(B)+\cdots+a_{m1}A_{m1}\det(B)$ （归纳假设）

$=\det(B)(a_{11}A_{11}+\cdots+a_{m1}A_{m1})=\det(B)\det(A)$

（定理2.1）

映射法：

$$f:\ \overbrace{\mathbb{R}^n\times\cdots\times\mathbb{R}^n}^{n}\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$\vec{A}^{(1)},\cdots\vec{A}^{(n)}\longmapsto\det D=\det\begin{pmatrix}A&C\\O&B\end{pmatrix}$$

由行列式的性质可知．f，n重线性，斜对称．由第0节推导过程可知

$$f(\vec{A}^{(1)},\cdots\vec{A}^{(n)})=\lambda\det(A)，其中$$

$\lambda\in\mathbb{R}$

$$f(\vec{e}^{(1)},\cdots\vec{e}^{(n)})=\det\begin{pmatrix}E&O\\O&B\end{pmatrix}$$

$$=\det\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&\\0&1&&0&C\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\\0&0&&1&\\0&0&\cdots&0&\\\vdots&\vdots&&\vdots&B\\0&0&\cdots&0&\end{pmatrix}=\det(B)$$

$$=\lambda\det(E)=\lambda．\quad 于是\ \lambda=\det(B)$$

故 $f(\vec{A}^{(1)},\cdots\vec{A}^{(n)})=\det(A)\det(B)$

$$\|$$

$$\det\begin{pmatrix}A&C\\O&B\end{pmatrix}\qquad\blacksquare$$

推论2.1 设 $A\in M_m(\mathbb{R})$，$B\in M_n(\mathbb{R})$

(i) 设 $C\in\mathbb{R}^{n\times m}$ 则

$$\begin{vmatrix}A&O\\C&B\end{vmatrix}=|A|\,|B|$$

(ii) 设 $C\in\mathbb{R}^{m\times n}$

$$\begin{vmatrix}C&A\\B&O\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||B|$$

证：(i) 利用上述定理和转置

(ii)
$$\begin{vmatrix}\boxed{C}&\boxed{A}\\\boxed{B}&\boxed{O}\end{vmatrix}=(-1)^m\begin{vmatrix}\boxed{C'}&\boxed{A}\\\boxed{B'}&\boxed{O}\end{vmatrix}$$

$$=\cdots=(-1)^{mn}\begin{vmatrix}A&C\\O&B\end{vmatrix}=(-1)^{mn}\det(A)\det(B)$$

$\blacksquare$

例：计算

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

1第行与第四行互换

$= (-2) \times 6 = -12$

~~例~~：定理2.3 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$，则

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

证：（矩阵法）如果 A 或 B 不满秩

则 $\det(A)\det(B) = 0$ （定理1.2）

$\because$ $\operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank}(A)$, $\operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank}(B)$

$\therefore$ $\operatorname{rank}(AB)$ 不满秩

$\therefore$ $\det(AB) = 0$ 定理成立

考虑 A, B 都满秩的情形

~~而且~~ 由第2章 定理6.1

$B = C_1 C_2 \cdots C_m$，~~其~~中 $C_1, \cdots C_m$

是初等方阵

断言：设 C 是n阶初等方阵

则 $\det(AC) = \det(A)\det(C)$

断言的证明：

(i) 设 $C = E_{ij}$

$\det(AE_{ij}) = \det(\vec{A}^{(1)}, \cdots \vec{A}^{(j)}, \cdots \vec{A}^{(i)}, \cdots \vec{A}^{(n)})$

$$= \begin{cases} -\det(A) & i \neq j \\ \det(A) & i = j \end{cases}$$

$$\det(A)\det(E_{ij}) = \begin{cases} -\det(A) & i \neq j \\ \det(A) & i = j \end{cases}$$

$\det(AE_{ij}) = \det(A)\det(E_{ij})$

(ii) 设 $C = E_{ij}(\alpha)$

$\det(AE_{ij}(\alpha)) = \det(A)$

$\det(A)\det(E_{ij}(\alpha)) = \det(A)$

$\Rightarrow \det(AE_{ij}(\alpha)) = \det(A)\det(E_{ij}(\alpha))$

(iii) 设 $C = E_i(\lambda)$，$\lambda \neq 0$

$$\det(AC)=\det(\vec{A}^{(1)},\dots\lambda\vec{A}^{(i)},\dots\vec{A}^{(n)})$$
$$=\lambda\det(\vec{A}^{(1)},\dots\vec{A}^{(i)},\dots\vec{A}^{(n)})=\lambda\det(A)$$

$$\det(A)\det(C)=\det(A)\cdot\lambda$$

于是等式成立.

$$\det(AB)=\det(\underbrace{A\,C_1\cdots C_{m-1}}\,C_m)$$
$$=\det(C_m)\det(\underbrace{A\,C_1\cdots C_{m-2}}\,C_{m-1})$$
$$=\cdots=\det(C_1)\cdots\det(C_m)\det(A)$$

$$\det(A)\det(B)=\det(A)\det(E\underbrace{C_1\cdots C_{m-1}}\,C_m)$$
$$=\det(A)\det(C_1)\cdots\det(C_m)\underline{\det(E)}$$
$$\Rightarrow\quad\det(AB)=\det(A)\det(B)$$

方法2. (~~[illegible]~~)

$$f:\underbrace{\mathbb{R}^n\times\cdots\times\mathbb{R}^n}_{n}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$\vec{B}^{(1)},\dots\vec{B}^{(n)}\longmapsto\det(AB)$$

$$f(\vec{B}^{(1)},\dots\vec{B}^{(n)})=\det(A\vec{B}^{(1)},\dots A\vec{B}^{(n)})$$

矩阵分块 (第2章3 | [illegible])

$$\because\ A(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\alpha(A\vec{x})+\beta A\vec{y}$$
$(\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n)$

$\therefore$ 当 $\vec{B}^{(j)}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}$ 时

$$f(\vec{B}^{(1)},\dots\vec{B}^{(n)})=\det(A\vec{B}^{(1)},\dots\underset{j}{\alpha A\vec{x}+\beta A\vec{y}},\dots A\vec{B}^{(n)})$$
$$=\alpha\det(A\vec{B}^{(1)},\dots\underset{j}{\vec{x}},\dots A\vec{B}^{(n)})+\beta\det(A\vec{B}^{(1)},\dots\underset{j}{\vec{y}},\dots A\vec{B}^{(n)})$$
$$=\alpha f(\vec{B}^{(1)},\dots,\overset{j}{\vec{x}}\dots\vec{B}^{(n)})+\beta f(\vec{B}^{(1)}\dots\overset{j}{\vec{y}}\dots\vec{B}^{(n)})$$

$\Rightarrow$ f n 重线性

$$f(\vec{B}^{(1)},\dots\underset{i}{\vec{B}^{(j)}},\dots\underset{j}{\vec{B}^{(i)}}\dots\vec{B}^{(n)})$$
$$=\det(A\vec{B}^{(1)},\dots\underset{i}{A\vec{B}^{(j)}},\dots\underset{j}{A\vec{B}^{(i)}},\dots A\vec{B}^{(n)})$$
$$=\det(\overrightarrow{(AB)}^{(1)},\dots\underset{i}{\overrightarrow{(AB)}^{(j)}}\dots\underset{j}{\overrightarrow{(AB)}^{(i)}}\dots\overrightarrow{(AB)}^{(n)})$$
$$=-\det(AB)$$
$\Rightarrow$ f 交错函数

于是 $f(\vec{B}^{(1)},\dots\vec{B}^{(n)})=\lambda\det(B)$, 其中 $\lambda\in\mathbb{R}$

$$f(\vec{e}^{(1)},\dots\vec{e}^{(n)})=\lambda\det(E)=\lambda=\det(A)$$
$$\Rightarrow\ \cancel{\lambda=}\ \det(AB)=\det(A)\det(B)\ \blacksquare$$

例 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & \cos\theta_1 & \cos 2\theta_1 \\ 1 & \cos\theta_2 & \cos 2\theta_2 \\ 1 & \cos\theta_3 & \cos 2\theta_3 \end{pmatrix}$ 求 $|A|$

解 $$A=\begin{pmatrix} 1 & \cos\theta_1 & 2\cos^2\theta_1-1 \\ 1 & \cos\theta_2 & 2\cos^2\theta_2-1 \\ 1 & \cos\theta_3 & 2\cos^2\theta_3-1 \end{pmatrix}$$

$$=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \cos\theta_1 & \cos^2\theta_1 \\ 1 & \cos\theta_2 & \cos^2\theta_2 \\ 1 & \cos\theta_3 & \cos^2\theta_3 \end{pmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{C}$$

$$|A|=|B||C|=2(\cos\theta_3-\cos\theta_1)(\cos\theta_3-\cos\theta_2)(\cos\theta_2-\cos\theta_1)$$

例: 设 $A=\left((\alpha_i+\beta_j)^{n-1}\right)_{n\times n}$

求 $\det(A)$

$$a_{ij}=(\alpha_i+\beta_j)^{n-1}$$
$$=\alpha_i^{n-1}+\binom{n-1}{1}\alpha_i^{n-2}\beta_j+\cdots+\binom{n-1}{n-2}\alpha_i\beta_j^{n-2}+\beta_j^{n-1}$$
$$=\underbrace{\left(\alpha_i^{n-1},\ \binom{n-1}{1}\alpha_i^{n-2},\ \cdots\ \binom{n-1}{n-2}\alpha_i,\ 1\right)}_{n-1}\left.\begin{pmatrix} 1 \\ \beta_j \\ \vdots \\ \beta_j^{n-1} \end{pmatrix}\right\}n-1$$

$$\Rightarrow A=\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1^{n-1}, & \binom{n-1}{1}\alpha_1^{n-2}, & \cdots & \binom{n-1}{n-2}\alpha_1, & 1 \\ & & \cdots & & \\ \alpha_n^{n-1} & \binom{n-1}{1}\alpha_n^{n-2} & \cdots & \binom{n-1}{n-2}\alpha_n, & 1 \end{pmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \beta_1 & & \beta_n \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_1^{n-1} & & \beta_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{C}$$

$$|A|=|B||C|=\binom{n-1}{1}\cdots\binom{n-1}{n-2}\begin{vmatrix} \alpha_1^{n-1} & \alpha_1^{n-2} & \cdots & 1 \\ & \cdots & & \\ \alpha_n^{n-1} & \alpha_n^{n-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}\det(C)$$

$$=\binom{n-1}{1}\cdots\binom{n-1}{n-2}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left[\prod_{1\le i<j\le n}(\alpha_j-\alpha_i)\right]\left[\prod_{1\le i<j\le n}(\beta_j-\beta_i)\right]$$

§3 行列式的应用

§3.1 伴随矩阵

定义: 设 $i,j\in\{1,\dots,n\}$

$$\delta_{ij}:=\begin{cases} 1, & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

称之为 n阶 Kronecker 符号

例：$E=(\delta_{ij})_{n\times n}$

引理3.1 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in M_n(\mathbb{R})$ 则

$\forall i,j\in\{1,\cdots,n\}$

(i) $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\delta_{ij}|A|$

(ii) $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=\delta_{ij}|A|$

证：设 $\vec{b}=(b_1,\cdots b_n)$，$B=\begin{pmatrix}\vec{A_1}\\ \vdots\\ \vec{A}_{j-1}\\ \vec{b}\\ \vec{A}_{j+1}\\ \vdots\\ \vec{A_n}\end{pmatrix}$

由定理2.1

$\det(B)=b_1B_{j1}+\cdots+b_nB_{jn}=b_1A_{j1}+\cdots+b_jA_{jn}$

令 $\vec{b}=\vec{A_i}$. 由 $i\neq j$ 时

$\det(B)=0\Rightarrow a_{i1}A_{j1}+\cdots+b_{in}A_{jn}=0$

当 $i=j$ 时 $A=B$

$\det(A)=a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}a_{jn}$. (i)成立

(ii) 类似 ▨

定义：设 $A\in M_n(\mathbb{R})$

$$A^{\vee}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\ A_{12}&A_{22}&&A_{n2}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ A_{1n}&A_{2n}&&A_{nn}\end{pmatrix}$$

称之为A的伴随矩阵.

定理3.1 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$

(i) $AA^{\vee}=A^{\vee}A=|A|E$

(ii) 如果A可逆，则 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{\vee}$

证：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$A^{\vee}=(a'_{ij})_{n\times n}$

$C=(c_{ij})=AA^{\vee}$.

由 $A^{\vee}$ 的定义：$a'_{ij}=A_{ji}$

$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a'_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=|A|\delta_{ij}$

$\Rightarrow C=|A|E$

(ii) 由(i)和 $|A|\neq 0$ 可知

$A\left(\frac{1}{|A|}A^{\vee}\right)=E \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{\vee}$ ▨

注：设 $A=(a_{ij})$ 可逆 $a_{ij}\in\mathbb{Z}$

则 $A_{ji}\in\mathbb{Z}$.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{A_{11}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{A_{1n}}{|A|} & & \frac{A_{nn}}{|A|}\end{pmatrix}$$

$|A|$ 是 A^{-1} 中所有元素的公分母.

例：利用 $|A|$ 表示 $|A^\vee|$

解：由上述定理(i)

$A^\vee A=|A|E \Rightarrow |A^\vee A|=|A^\vee||A|=|A|^n$

当 $|A|\neq 0$ 时 $|A^\vee|=|A|^{n-1}$

当 $|A|=0$ 时 情形1：$A=O \Rightarrow |A^\vee|=0$

情形2：$A\neq O$ 时

由 $A^\vee A=O \Rightarrow \operatorname{rank}(A^\vee)<n \Rightarrow |A^\vee|=0$

于是 $\boxed{|A^\vee|=|A|^{n-1}}$

例：设 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 且 $A\neq O$ 证明

如果 $A^t=A^\vee$ 则 A 可逆

证：假设 A 不可逆，则 ~~由上例~~

$AA^\vee=O$ （定理3.1(i)）

~~$|A^\vee|=0 \Rightarrow$~~

$\Rightarrow AA^t=O$

$\because A\neq O$，不妨设 $\vec{A_i}\neq(0,\cdots 0)$

AA^t 中在 i 行 i 列的元素是

$$\vec{A_i}(\vec{A_i})^t=(a_{i1},\cdots a_{in})\begin{pmatrix}a_{i1}\\ \vdots\\ a_{in}\end{pmatrix}=a_{i1}^2+\cdots+a_{in}^2$$

$\because a_{i1},\cdots a_{in}\in\mathbb{R}$ 且不全为零 $\therefore$

$a_{i1}^2+\cdots+a_{in}^2\neq 0$ 与 $AA^t=O$ 矛盾

思考题. 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 证明

$\operatorname{rank}(A^tA)=\operatorname{rank}(A)$.

§3.2 Cramer's 法则

定理3.2 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$, $\vec{b}\in\mathbb{R}^n$

$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ 则

$$A\vec{x}=\vec{b} \text{ 有唯一解} \iff A \text{ 可逆}$$

此时 $$x_i=\frac{\det(\vec{A}^{(1)},\cdots\vec{A}^{(i-1)},\vec{b},\vec{A}^{(i+1)},\cdots\vec{A}^{(n)})}{\det(A)}$$

$i=1,2,\cdots n$

证：由第2章定理2.3

$A\vec{x}=\vec{b}$ 有唯一解 $\iff \operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A\vdots\vec{b})=n$

$\because A\in M_n(\mathbb{R})$

$\therefore$ ~~Ax~~ $\operatorname{rank}(A)=n \Rightarrow \operatorname{rank}(A\vdots\vec{b})=n$

于是 $A\vec{x}=\vec{b} \iff \operatorname{rank}(A)=n$ 即 A 可逆

(定理2.2)

设 A 可逆

$\vec{x}=A^{-1}\vec{b} \Rightarrow x_i=\left(\overrightarrow{A^{-1}}\right)_i\cdot\vec{b}$

$=\frac{1}{|A|}(A_{1i},\cdots A_{ni})\vec{b}$

$=\frac{1}{|A|}(b_1A_{1i}+\cdots+b_nA_{ni})$, 其中 $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{|A|}\det(\vec{A}^{(1)},\cdots\vec{A}^{(i-1)},\vec{b},\vec{A}^{(i+1)},\cdots\vec{A}^{(n)})$, (定理2.1)

$\boxed{证}$

例 设 $P_i=(x_i,y_i,z_i)\in\mathbb{R}^{3\times3}$, $i=1,2,3,4$

证明 P_1,P_2,P_3,P_4 共面 $\iff$

$$\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1&1\\x_2&y_2&z_2&1\\x_3&y_3&z_3&1\\x_4&y_4&z_4&1\end{vmatrix}=0$$

证：设 ~~平面方程是~~

P: $ax+by+cz=d$, a,b,c,d 不全为零

P_1,P_2,P_3,P_4 在 P 上 $\iff$

$ax_i+by_i+cz_i+(-1)d=0$, $i=1,2,3,4$

即

$$(H).\quad \underbrace{\begin{pmatrix}x_1,&y_1,&z_1&-1\\x_2&y_2&z_2,&-1\\x_3&y_3&z_3&-1\\x_4&y_4&z_4&-1\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

(H) 有非零解 $\Longleftrightarrow$ $\det(A)=0$

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

例：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$　$a_{ij}\in\mathbb{Z}$

$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\in\mathbb{Z}^n$，$\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

证明 当 $\det(A)=\pm1$ 时，方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的解是整数

证：由 Cramer 法则

$$x_i=\frac{1}{|A|}\left|\vec{A}^{(1)},\dots\vec{A}^{(i-1)},\vec{b},\vec{A}^{(i+1)},\dots\vec{A}^{(n)}\right|$$

$$=\pm\left|\vec{A}^{(1)},\dots\vec{A}^{(i-1)},\vec{b},\vec{A}^{(i+1)},\dots,\vec{A}^{(n)}\right|\in\mathbb{Z}\ \square$$

注：当 $\det(A)\neq0$ 时　$\det(A)$ 给 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的一个公分母.

§3.3 行列式与秩

定义：设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$i_1,\dots i_k\in\{1,\dots m\}$

$j_1,\dots j_k\in\{1,\dots,n\}$ 则行列式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & \dots & a_{i_1j_k} \\ & \dots & \\ a_{i_kj_1} & \dots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix}$$ 称为 A 的一个 k 阶子式

记为 $M_A\begin{pmatrix} i_1,\dots i_k \\ j_1,\dots j_k \end{pmatrix}$

注：$i_1,\dots i_k\in\{1,\dots m\}$ 不一定两两不同，也不一定按大小排列. 对 $j_1\dots j_k$ 一样

例　$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 4 & 5 & 6 & y \\ 7 & 8 & 9 & z \end{pmatrix}$

$M_A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$　　$M_A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & x \\ 6 & y \end{vmatrix}$

$M_A\begin{pmatrix} 2, & 1 \\ 3, & 4 \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} 6, & y \\ 3, & x \end{vmatrix}$　　$M_A\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}=0$

注 $i_1,\dots i_k$ 中或 $j_1,\dots j_k$ 中有两个数相同则对应子式为零

定理3.3 设 ~~rank(A~~ $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$

则下列命题等价

(i) $\operatorname{rank}(A)=r$

(ii) A 中有一个 r 阶子式非零，且任何大于 r 阶的子式都是零

(iii) A 中有一个 r 阶子式非零，任何 $r+1$ 阶子式都是零

证：(i) ⇒ (ii) 不妨设 $\vec{A}^{(1)},\dots,\vec{A}^{(r)}$ 线性无关

令 $B=(\vec{A}^{(1)},\dots,\vec{A}^{(r)})_{m\times r}$ 则 $\operatorname{rank}(B)=r$

于是 $\exists\ i_1,\dots,i_r\in\{1,2,\dots n\}$ 使得

$\vec{B}_{i_1},\dots,\vec{B}_{i_r}$ 线性无关（∵ 行秩 = 列秩）

$\Rightarrow$ $\cancel{\boxed{M_B\begin{pmatrix}1 & 2,\dots & r\\ i_1, & i_2\dots & i_r\end{pmatrix}\neq 0}}$ $M_B\begin{pmatrix}i_1,\dots & i_r\\ 1,\dots & r\end{pmatrix}\neq 0$

但 $M_A\begin{pmatrix}i_1, & i_2, & \dots & i_r\\ 1 & 2, & \dots & r\end{pmatrix}=M_B\begin{pmatrix}i_1,\dots & i_r\\ 1,\dots & r\end{pmatrix}\neq 0$

假设 $M_A\begin{pmatrix}s_1,\dots & s_k\\ t_1,\dots & t_k\end{pmatrix}\neq 0$ 且 $k>r$

则 $C=\begin{pmatrix}a_{s_1,t_1} & \cdots & a_{s_1,t_k}\\ \vdots & & \\ a_{s_k,t_1} & \cdots & a_{s_k,t_k}\end{pmatrix}$ 满秩

$\Rightarrow$ $\vec{C}^{(1)},\dots,\vec{C}^{(k)}$ 线性无关

$\Rightarrow$ $\vec{A}^{(t_1)},\dots,\vec{A}^{(t_k)}$ 线性无关

$\Rightarrow$ $\operatorname{rank}(A)\geq k$ 矛盾

(ii) ⇒ (iii) 显然

(iii) ⇒ (i) 不妨设 $M_A\begin{pmatrix}1,2,\dots r\\ 1,2,\dots r\end{pmatrix}\neq 0$

设 $D=\begin{pmatrix}a_{11}, & \cdots & a_{1r}\\ & \cdots & \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr}\end{pmatrix}$ $\operatorname{rank}(D)=r$

则 $\vec{D}^{(1)},\dots,\vec{D}^{(r)}$ 线性无关

$\Rightarrow$ $\vec{A}^{(1)},\dots,\vec{A}^{(r)}$ 线性无关

$\Rightarrow$ $\operatorname{rank}(A)\geq r$.

假设 rank(A) > r 不妨设 $\vec{A}^{(1)}, \dots \vec{A}^{(r+1)}$ 线性无关. 设 $B = (\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(r+1)})$. 则

$$\operatorname{rank}(B) = r+1$$

于是 ∃ 行 $\vec{B}_{i_1}, \dots \vec{B}_{i_r}, \vec{B}_{i_{r+1}}$ 线性无关

$$\Rightarrow \det(\vec{B}_{i_1}, \dots \vec{B}_{i_r}, \vec{B}_{i_{r+1}}) \neq 0$$

(定理2.1)

但 $\det(\vec{B}_{i_1}, \dots \vec{B}_{i_r}, \vec{B}_{i_{r+1}})$ 是 A 中一个子式

$\rightarrow\!\leftarrow$ □

推论3.1. 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 且 $A \neq O$. 则 ~~rank(A) = r ⟺~~ rank(A) 等于 A 中非零子式的最大阶数

问题: 给定 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 计算 rank(A) 和一个最大阶的非零子式

定义: 设 $U = M_A\begin{pmatrix} i_1, \dots & i_k \\ j_1, \dots & j_k \end{pmatrix}$ 是矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 的子式, $s \in \{1, \dots, m\}$, $t \in \{1, \dots, n\}$

则 $M_A\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_k & s \\ j_1 \cdots j_k & t \end{pmatrix}$ 称为 U 的一个加边子式

定理 3.4 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 则

rank(A) = r ⟺ 存在 A 的一个 r 阶子式非零且关于该子式的所有加边子式都是零

证: "⇒" 定理 3.3.

"⟸" 设 $N = M_A\begin{pmatrix} i_1, \dots & i_r \\ j_1, \dots & j_r \end{pmatrix} \neq 0$

$\forall\, s \in \{1, \dots, m\}$ $t \in \{1, \dots, n\}$

$$N_{st} = M_A\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_r, s \\ j_1, \dots j_r, n \end{pmatrix}$$