更正引理2.1的证明

设 $1 \le k_1 < \cdots < k_r \le n$

$$(E)\begin{cases} a_{1k_1}x_{k_1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{2k_2}x_{k_2} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{rk_r}x_{k_r} + \cdots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases}$$

$a_{1k_1}, a_{2k_2}, \cdots, a_{rk_r}$ 都非零

(E') 由 (E) 中后 $r-1$ 个方程组成

看成 $x_{k_1+1} \cdots x_{k_2} \cdots x_n$ 的方程组

由归纳假设 (E') 相容. 利用

$a_{1k_1} \ne 0$ 解 x_{k_1} 可知 (E) 相容

再设 $r < n$

情形1 $r-1 < n-k_1$ ①

则由归纳假设 (E') 不确定

把 (E') 的两组不同解代入 (E) 的第一个方程. 得到 (E) 的两组解 $\Rightarrow$ (E) 不确定

情形2. $r-1 = n-k_1$

则 $k_1 > 1$. 即 x_1 在 (E) 中实际不出现

x_1 可取任意值. $\because$ (E) 相容 $\therefore$ (E) 不确定

笛卡儿计划

1. 把世界上所有问题化为数学问题
2. 把数学问题化为解方程组的问题
3. 把解方程组化为解一元方程的问题
4. 解之

§3 齐次线性方程组

homogeneous

$$(H)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

称为关于 $x_1,\cdots x_n$ 的齐次线性方程组

注 (1) (H) 由其系数矩阵唯一确定

(2) 因为 $x_1=0,\cdots,x_n=0$ 是 (H) 的(平凡解)

所以 (H) 相容.

命题3.1 在 (H) 中 如果 $m<n$. 则

(H) 有非平凡解, 即 (H) 不确定

证 由上节课最后一个例子可知 (2)

(H) 或者不相容 或者不确定

因为 (H) 相容, 所以 (H) 不确定

命题3.2 设 (H) 中 $m=n$

如果 (H) 只有平凡解. 则对于任意的数

$b_1,\cdots b_m$

$$(L)\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

确定

证: 由定理3.1 (H) 等价于一个阶梯型

方程组 (E). 由 Gauss 消去法. 可知

(E) 也是齐次的 因为 (E) 只有平凡解

所以

$$(E)\begin{cases} a_{11}'x_1+\cdots+a_{1n}'x_n=0 \\ a_{22}'x_2+\cdots+a_{2n}'x_n=0 \\ \ddots \\ a_{nn}'x_n=0 \end{cases}$$

其中 $a'_{11}, \cdots a'_{nn}$ 都非零.

对 (L) 用同样步骤的消元法, (L) 等价于

$$
(L')\begin{cases}
a'_{11}x_1 + \cdots\cdots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\
\quad a'_{22}x_1 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\
\qquad \ddots \\
\qquad\qquad a'_{nn}x_n = b'_n
\end{cases}
$$

由命题(2.1) (L) 是确定的 □

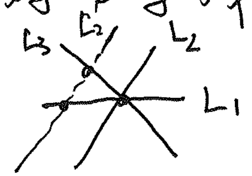
例: 设 L_1, L_2 是平面上两条直线

如果 L_1, L_2 相交于原点, 则

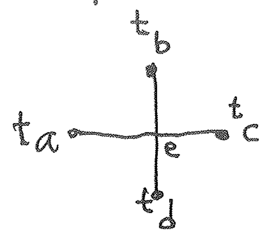
把 L_1 平行移至 L'_1, L_2 平行移至 L'_2

则 L'_1 与 L'_2 相交于一点

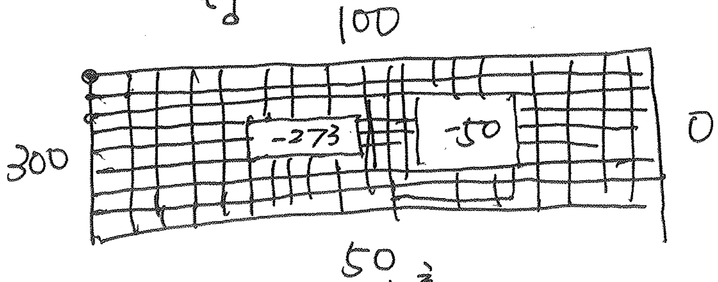
但对三条线



例 平板受热的问题



$$t_e = \frac{t_a + t_b + t_c + t_d}{4}$$



与边界接触的点是边界点, 其它是内部点

设有416个~~边界~~内部点, 204个边界点,

每个内部点, 对应一个线性方程

$$t_e = \frac{t_a + t_b + t_c + t_d}{4}$$

从而得到关于416个未知数 416个方程的线性方程组 (L)

问题 (L) 是不是确定的

由命题3.2 只要证明边界点温度都是零时, (L) 对应的齐次线性方程组 (H) 只有零解 即可

设 e 是内部点且 $|t_e|$ 取最大值

由 $t_e = \dfrac{t_a + t_b + t_c + t_d}{4}$

得 $4t_4 = t_a + t_b + t_c + t_d$

$$|4t_e| = |t_a + t_b + t_c + t_d|$$

$$\le |t_a| + |t_b| + |t_c| + |t_d| \le 4|t_e|$$

$\Rightarrow |t_e| = |t_a| = |t_b| = |t_c| = |t_d|$

由于~~边界~~网连通且边界点温度为零

$\Rightarrow |t_e| = 0 \Rightarrow t_p = 0$ ~~由~~ P是任意内点

$\Rightarrow$ (H) 只有平凡解 $\Rightarrow$ (L) 确定.

§4 二阶行列式 (determinant)

设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. A 的行列式

定义为 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 记为 $\det(A)$ 或 $|A|$

例 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$

命题 4.1 设

$$(L_2) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

(i) (L_2) 确定 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

(ii) 当 $|A| \neq 0$ 时, (L_2) 的唯一解是

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{|A|}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{|A|}.$$

证: "$\Rightarrow$" 因为 (L_2) 确定, 所以

a_{11}, a_{21} 不全为零. 不妨设 $a_{11} \neq 0$

由 Gauss 消去法

$$\left(A \,\middle|\, \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix}\right) \longrightarrow \left(\begin{matrix} a_{11}, & a_{12} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} b_1 \\ b_2' \end{matrix}\right)$$

由~~定理~~命题 2.1 $a_{22} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} = \dfrac{|A|}{a_{11}} \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0$

"$\Leftarrow$" 因为 $|A| \neq 0$, 所以 a_{11}, a_{21} 不全为零

同样的消去法可得

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & \dfrac{|A|}{a_{11}} & b_2' \end{array}\right)$$

由 $|A| \neq 0$ 和~~命题~~ a_{11}，(L_2) 确定.

(ii) 直接验证 $\boxtimes$

例 设 $(L_2)\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + \alpha x_2 = 3 \end{cases}$. 当 α 取何值时 (L_2) 确定

解 (L_2) 确定 $\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} \neq 0$

$\Longleftrightarrow \alpha - 2 \neq 0 \Longleftrightarrow \alpha \neq 2.$

§5. 集合与映射

§5-1 集合

描述. 集合是一些对象的总体

例 26个字母组成集合

$\{a, b, \dots, z\}$

正偶数组成集合

$\{2, 4, 6, \dots\} = \{a \mid a$ 是正整数且是2的倍数$\}$

集合中的对象称为集合的元素.

例如 a 是 $\{a, b, \dots z\}$ 的元素. 记为

$a \in \{a, b, \dots, z\}$

但 $\alpha \notin \{a, b, \dots, z\}$

例 正整数集 $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$

自然数集 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

整数集 $\mathbb{Z} = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2 \dots\}$

有理数集 $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

实数集 $\mathbb{R}$

复数集 $\mathbb{C} = \{a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

定义：设 S, T 是两个集合. 如果 S 中的元素都是 T 中的元素，则称 S 是 T 的子集，记为 $S\subset T$

注：$S=T \iff S\subset T$ 且 $T\subset S$

例 $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}^+ \subsetneq \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

定义：不含任何元素的集合为空集，记为 $\emptyset$.

空集是任何集合的子集.

例. 设 $S=\{a,b,c\}$ 求 S 的所有子集

$\emptyset$ $\{a\}$ $\{b\}$ $\{c\}$ $\{a,b\}$ $\{a,c\}$, $\{b,c\}$

$\{a,b,c\}$.

如果 $S\subset T$ 且 $S\neq T$，则称 S 是 T 的真子集，记为 $S\subsetneq T$.

定义：设 S, T 是集合. S 和 T 的并集

$S\cup T=\{a \mid a\in S$ 或 $a\in T\}$.

S 和 T 的交集

$S\cap T=\{a \mid a\in S$ 且 $a\in T\}$

显然

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny, column sep=small] & S \arrow[dr, phantom, "\subset"] & \\ S\cap T \arrow[ur, phantom, "\subset"] \arrow[dr, phantom, "\subset"] & & S\cup T \\ & T \arrow[ur, phantom, "\subset"] & \end{tikzcd}$$

命题5.1 设 R, S, T 是三个集合

(i) 交换律 $S\cap T=T\cap S$, $S\cup T=T\cup S$

(ii) 结合律 $R\cup(S\cup T)=(R\cup S)\cup T$

$R\cap(S\cap T)=(R\cap S)\cap T$

(iii) 分配律：$R\cap(S\cup T)=(R\cap S)\cup(R\cap T)$

$R\cup(S\cap T)=(R\cup S)\cap(R\cup T)$

证：(i)(ii) 显然，我们验证(iii)中(i)

先证：(*) $R\cap(S\cup T)\subset(R\cap S)\cup(R\cap T)$

设 $a\in R\cap(S\cup T)$，则

$a\in R$ 且 $a\in S$ 或 $a\in T$

$\Rightarrow$ $a\in R$ 且 $a\in S$ 或 $a\in R$ ~~或~~ 且 $a\in T$

$\Rightarrow$ $a\in R\cap S$ 或 $a\in R\cap T$

$\Rightarrow$ $a\in(R\cap S)\cup(R\cap T)$

$\Rightarrow$ (*) 成立

再证：(**)：$(R\cap S)\cup(R\cap T)\subset R\cap(S\cup T)$

由 $R\cap S\subset R$ 且 $R\cap T\subset R$

$\Rightarrow$ $(R\cap S)\cup(R\cap T)\subset R$

$R\cap S\subset S\cup T$，$R\cap T\subset S\cup T$

$\Rightarrow$ $(R\cap S)\cup(R\cap T)\subset S\cup T$

$\Rightarrow$ $(R\cap S)\cup(R\cap T)\subset R\cap(S\cup T)$

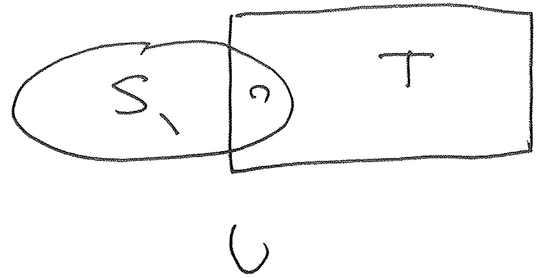
$\Rightarrow$ (**) 成立

由 (*) 和 (**)，(iii) 中第一个分配律成立。□

定义：设 S, T 是集合，S 与 T 的差

记为 $S\setminus T := \{a\in S \mid a\notin T\}$

例 $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N} = \{-1,-2,\dots\} =: \mathbb{Z}^-$



例：设 $S_1, S_2, \dots S_k$ 是非空集合

$S_1,\dots S_k$ 的笛卡儿积，

$S_1\times\dots\times S_k = \{(s_1,\dots s_k) \mid s_1\in S_1,\dots s_k\in S_k\}$

当 $S_1=\dots=S_k$ 时，

$S_1\times\dots\times S_k$ 记为 S_1^k.

例: $\mathbb{R}^{1\times n}=\{(x_1,\cdots x_n)\mid x_1,\cdots x_n\in\mathbb{R}\}$

称为实数上的n维行向量空间

$$\mathbb{R}^{n\times 1}=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \;\middle|\; x_1,\cdots x_n\in\mathbb{R}\right\}$$

称为实数上的列向量空间

§5.2 映射

定义: 设 S, T 是非空子集

$f\subset S\times T$ 称为从 S 到 T 的映射

如果 对于任意 $s\in S$ 存在唯一的 $t\in T$

使得 $(s,t)\in f$

即 $\forall s\in S$, $\exists!\; t\in T$ 使得

$(s,t)\in f$

注: 设 f 是从 S 到 T 的映射.

如果 $(s,t)\in f$, 则记 t 为 $f(s)$

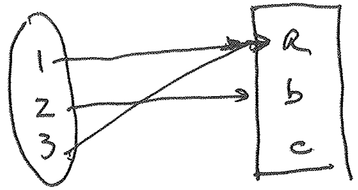
称 t 为 s 在 f 下的像.

$$f: S\longrightarrow T$$
$$s\longmapsto f(s)$$

例: 设 $S=\{1,2,3\}$. $T=\{a,b,c\}$

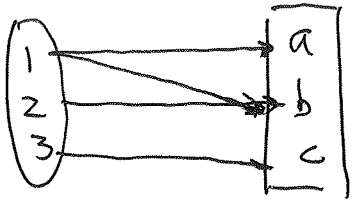
$f=\{(1,a),(2,b),(3,a)\}$

则 f 是映射



$g=\{(1,a)\ (2,b),(3,c),(1,b)\}$

不是映射

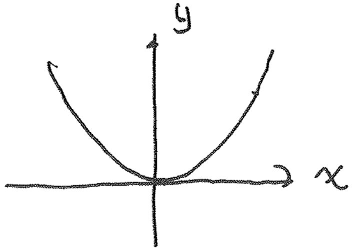


例: 学号集合到学生姓名是映射

学生姓名到学号集合不一定是映射.

回忆: $f: S \longrightarrow T$ 映射
$a \longmapsto f(a)$

例: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$



$f = \{ (x, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \}$

即我们通过函数的图像来定义什么是函数

定义: $f: S \longrightarrow T$ 是映射.
则称 S 是 f 的原像集 (定义域)

$\mathrm{im}(f) = \{ t \in T \mid \exists s \in S.\ f(s) = t \}$

称为 f 的像集. (image)

注 $\mathrm{im}(f) = \{ f(s) \mid s \in S \}$

设 $S' \subset S$ $f(S') = \{ f(s') \mid s' \in S \}$
称为 S' 在映射 f 下的像集

注 显然 $\mathrm{im}(f) = f(S)$.

例: $\sin: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin(x)$.

则 $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$

定义: 设 $f: S \to T$ 是映射.
如果 $f(S) = T$. 则称 T 的满射

例: $P_S: S \times T \longrightarrow S$
$(s, t) \longmapsto s$

称为从 $S \times T$ 到 S 的投射.
P_S 是满射. 同样地可以定义
从 $S \times T$ 到 T 的投射 P_T.

定义: 设 $f: S \longrightarrow T$. $T' \subset T$

$f^{-1}(T') = \{ s \in S \mid f(s) \in T' \}$

称为 T' 在 f 下的原(逆)像集.

例 $f^{-1}(T) = S$

$\sin^{-1}(\{0\}) = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

定义：设 $f: S \to T$ 是映射.

如果 $\forall s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$

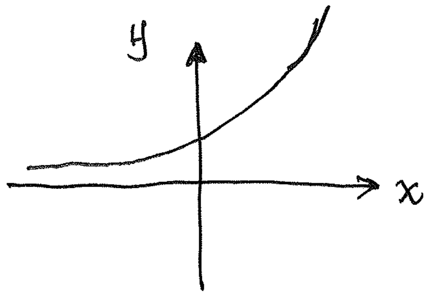
$$f(s_1) \neq f(s_2)$$

则称 f 是单射.

注：f 是单射 $\iff \forall t \in T$.

$f^{-1}(\{t\}) = \emptyset$ 或 $f^{-1}(\{t\})$ 只含一个元素

例：$\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$ $\quad (2^x)$



例 设 $S' \subset S$. $f: S' \to S$, $s' \mapsto s'$

是单射. 称为 S' 到 S 的嵌入.

定义：设 $f: S \to T$. 如果 f 既是单射，又是满射，则称 f 是双射（一一对应）

例：$\mathrm{id}_S : S \to S$, $s \mapsto s$.

例 设 $f: S \to T$

$S' \subset S$

$f|_{S'} : S' \to T$, $s' \mapsto f(s')$

称为 f 在 S' 上的限制.

例：$\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 非单非满

$\sin: \mathbb{R} \to \operatorname{im}(\sin) = [-1,1]$ 满射

$\sin\big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}: [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ 双射

例：设 $f: S \to T$, $T_1, T_2 \subset T$

证明 $f^{-1}(T_1 \cap T_2) = f^{-1}(T_1) \cap f^{-1}(T_2)$

证：先证 (*) $f^{-1}(T_1 \cap T_2) \subset f^{-1}(T_1) \cap f^{-1}(T_2)$ (*)

$T_1 \cap T_2 \subset T_1 \Rightarrow f^{-1}(T_1 \cap T_2) \subset f^{-1}(T_1)$

同理 $f^{-1}(T_1 \cap T_2) \subset f^{-1}(T_2)$

于是 (*) 成立

再证：$f^{-1}(T_1 \cap T_2) \supset f^{-1}(T_1) \cap f^{-1}(T_2)$

设 $s \in f^{-1}(T_1) \cap f^{-1}(T_2)$，则

并且 $f(s) \in T_1$ 且 $f(s) \in T_2$

$\Rightarrow f(s) \in T_1 \cap T_2 \Rightarrow s \in f^{-1}(T_1 \cap T_2)$.

$\square$

定义：设 R, S, T 是非空集

$f: R \to S$, $g: S \to T$

是映射 定义：

$h: R \to T$

$r \mapsto g(f(r))$

称 h 是 f 与 g 的复合

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h = g\circ f"'] & S \arrow[d, "g"] \\ & T \end{tikzcd}$$

记为 $g \circ f$

即 $\forall r \in R$

$(g \circ f)(r) = g(f(r))$.

例：R 某中学学生的集合

S 该中学班的集合

T：各班的班主任.

$f: R \longrightarrow S$

$r \longmapsto f(r)$ 是 r 所在的班

$g: S \longrightarrow T$

$s \longmapsto g(s)$ 是 s 的班主任

$h = g \circ f$ $\quad$ $h(r)$ 是 r 的班主任

例：此时 $f \circ g$ 没有意义

例：$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$ $\quad$ $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x+1$

$$g \circ f(x) = g(x^2) = x^2 + 1$$

$$f \circ g(x) = f(x+1) = (x+1)^2$$

$$\Rightarrow g \circ f \neq f \circ g$$

例：设 $f: S \to T$.

$$id_T \circ f = f$$

同理 $f \circ id_S = f$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f = id_T \circ f"'] & T \arrow[d, "id_T"] \\ & T \end{tikzcd}$$

命题 5.2 设 $f: R \to S$, $g: S \to T$ 是两个映射.

(i) 如果 f, g 都是满射, 则 $g \circ f$ 也是满的

(ii) 如果 f, g 都是单射, 则 $g \circ f$ 也是单的

(iii) 如果 f, g 都是双射, 则 $g \circ f$ 也是双射

证：(i) $g \circ f(R) = g(f(R))$
$= g(S) = T$.

(ii) 设 $r_1, r_2 \in R$, $r_1 \neq r_2$ 则

$$f(r_1) \neq f(r_2) \Rightarrow g(f(r_1)) \neq g(f(r_2))$$

即 $g\circ f(r_1) \neq g\circ f(r_2)$. $\Rightarrow g\circ f$ 单

(iii) 由 (i), (ii) 直接得出.

定义: 设 $f: S \to T$, $g: T \to S$

如果 $g\circ f = id_S$ 且 $f\circ g = id_T$

则称 f 是可逆映射, g 是 f 的一个逆映射

注1. 如果 f 可逆. 则 g 也可逆

~~注2: 如果f可逆, 则它的逆映射唯一.~~

~~可记为 f^{-1}~~

~~验证: 设 $g_1\circ f = id_S$, $f\circ g_1 = id_T$~~

~~$g_2\circ f = id_S$ $f\circ g_2 = id_T$~~

g

定理5.1 设 $f: S \to T$ 映射.

则 f 可逆 $\Longleftrightarrow$ f 是双射.

证: "$\Rightarrow$" 设 $g: T \to S$ 是 f 的一个逆映射

$\forall t \in T$

$$\underbrace{f\circ g}_{id_T}(t) = t \Rightarrow f(g(t)) = t$$

$\Rightarrow f$ 满射

设 $s_1, s_2 \in S$. 如果 $f(s_1) = f(s_2)$

则 $g(f(s_1)) = g(f(s_2)) \Rightarrow g\circ f(s_1) = g\circ f(s_2)$

$\Rightarrow id_S(s_1) = id_S(s_2) \Rightarrow s_1 = s_2$.

$\Rightarrow f$ 是单射.

"$\Leftarrow$" $\forall t \in T$. $\exists!\, s \in S$ 使得

$t = f(s)$

$$g: T \longrightarrow S$$

$$t \longmapsto s \quad 其中\ f(s) = t$$

则 g 是良定义的.

$g\circ f(s) = g(f(s)) = s \Rightarrow g\circ f = id_S$

$\forall t \in T$ $f\circ g(t) = f(g(t)) = f(s) = t \Rightarrow f\circ g = id_T$ ∎

例: $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$ 是双射

于是 sin 有逆映射

定理5.2. 设 $f: R \to S$, $g: S \to T$

$h: T \to U$ 是~~映射~~

则 $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$ (结合律)

$$
\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] \arrow[drr, dashed] & S \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & \\
 & T \arrow[r, "h"] & U
\end{tikzcd}
$$

证: $\forall r \in R$

$(h\circ g)\circ f(r) = h\circ g\,(f(r)) = h(g(f(r)))$

$h\circ(g\circ f)(r) = h(g\circ f(r)) = h(g(f(r)))$

$\Rightarrow (h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$ $\boxed{}$

推论5.1. 设 $f: S \to T$ 可逆.

如果 g_1, g_2 是 f 的逆映射

则 $g_1 = g_2$

证: $g_1\circ f = id_S$

$$
\begin{aligned}
(g_1\circ f)\circ g_2 &= id_S\circ g_2 = g_2 \\
\| \\
g_1\circ(f\circ g_2) &= g_1\circ id_T = g_1
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow g_1 = g_2$ $\boxed{}$

注 当 f 可逆时, 记 f 的逆为 f^{-1}

注: 设 $f: S \to T$ 可逆, $U \subset T$

$f^{-1}(U)$ 有两个含义

(i) U 在 f 下的逆像集

(ii) U 在 f^{-1} 下的像集

断言: 两者相同

验证：设 V 是 U 在 f 下的原像集

W 是 U 在 f^{-1} 下的像集.

证：设 $x\in V$ 则 $f(x)\in U$

$$\underbrace{f^{-1}(f(x))}_{=\,f^{-1}\circ f(x)=x} \in W \Rightarrow x\in W$$

即 $V\subset W$

反之：$y\in W$ $\exists\ u\in U$ 使得

$$y=f^{-1}(u)$$

$$\Rightarrow f(y)=f\circ f^{-1}(u)=u\in U$$

$$\Rightarrow y\in V \Rightarrow W\subset V$$

$V=W$ ▨

推论5.2 设 $f: R\to S$, $g: S\to T$ 都可逆 则 $(g\circ f)$ 可逆且

$$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$$

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[dr, shift right, "g\circ f"'] & S \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \arrow[d, shift left, "g"] \\
 & T \arrow[u, shift left] \arrow[ul, shift right, "g^{-1}f^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

证：$(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f)$

$$=f^{-1}\circ(g^{-1}\circ g)\circ f$$

$$=f^{-1}\circ id_S\circ f=f^{-1}\circ f=id_R$$

$$(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1})$$

$$=g\circ(f\circ f^{-1})\circ g^{-1}=g\circ id_S\circ g^{-1}=g\circ g^{-1}$$

$$=id_T$$ ▨

推论5.3. 设 $f: S\to T$ 可逆

则 $(f^{-1})^{-1}=f$.

证：由定义直接得出. ▨

§5.3 有限集和无限集

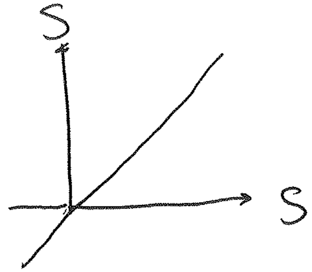
习题课讲.

§6 二元关系

定义：设 S 是非空集合，~~$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$~~ $R \subset S\times S$ 称为 S 上的一个二元关系。如果 $(a,b)\in R$，则称 a 与 b 有关系 R，记为 aRb

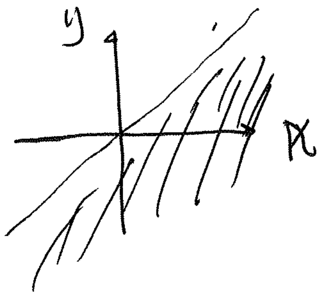
例：设 $=$ 为集合 $\{(a,a) \mid a\in S\}$

$a=a$



例 设 $\geq$ 为集合 $\{(a,b) \mid a,b\in\mathbb{R}$, ~~$a-b$ 为正~~ $a-b$ 非负$\}$

$(a,b)\in\, \geq \iff a\geq b$



~~例 设 S 是 $\mathbb{R}^2$ 中所有直线的集合~~

~~$V \subset S\times S$~~

~~$V := \{l_1 \perp l_2 \mid l_1, l_2 \in S\}$~~

~~$\perp \subset S\times S$~~

~~$\perp = \{(l_1,l_2) \mid l_1,l_2\in S$, l_1 垂直 $l_2\}$~~

例：设 L 是 $\mathbb{R}^2$ 中所有直线的集合

$C = \{(l_1,l_2) \mid l_1,l_2\in L$, l_1,l_2 有公共点$\}$

$l_1 C l_2$ 是指 l_1 和 l_2 ~~不~~重合或交于一点。