回忆：设 L 代表 $\mathbb{R}^2$ 上所有直线的集合

$\mathscr{C} = \{(l_1, l_2) \in L^2 \mid l_1, l_2$ 有公共点$\}$

$l_1 \mathscr{C} l_2$ 代表 l_1 与 l_2 相交或重合

§6.1 等价关系

定义：设 $\sim$ 是集合 S 上的二元关系

如果 $\sim$ 满足

(i) $\forall a \in S$，$a \sim a$ （自反律）

(ii) 设 $a, b \in S$，如果 $a \sim b$，则 $b \sim a$ （对称律）

(iii) 设 $a, b, c \in S$，如果 $a \sim b$，$b \sim c$ 则 $a \sim c$ （传递律）

则称 $\sim$ 是等价关系

例：等于关系"$=$"是等价关系

验证：$\forall a \in S$ $a = a$．自反律成立

对称和传递律自然成立．

例：设 L 代表 $\mathbb{R}^2$ 上的所有直线

$/\!/ := \{(l_1, l_2) \in L^2 \mid l_1$ 与 l_2 平行或重合$\}$

则"$/\!/$"是等价关系．

例：设 S 是某中学全体同学的集合

$\sim_c := \{(s_1, s_2) \in S^2 \mid s_1, s_2$ 同班$\}$

同班同学是等价关系

例："$\geq$"不是 $\mathbb{R}$ 上等价关系（不满足对称律）"$\mathscr{C}$"不是 L 上的等价关系（不满足传递性）

例：设 $S=\{1,2\}$　$R=\{(1,1)\}$

因为 $(2,2)\notin R$，所以 R 不满足自反律.

三个在今后常用的等价关系

1. 设 L_n 是 $\mathbb{R}$ 上 n 元线性方程组的集合

$$\sim\ =\{(L_1,L_2)\in L_n^2 \mid L_1, L_2 \text{ 等价}\}$$

2 设 $f: S \longrightarrow T$.

$$\sim_f := \{(s_1,s_2)\in S^2 \mid f(s_1)=f(s_2)\}$$

称 $\sim_f$ 是由 f 诱导出的等价关系

验证 (i) $\forall a\in S$　$f(a)=f(a) \Rightarrow a \sim_f a$

自反性成立

(ii) 设 $a,b\in S$，$a\sim_f b$. 则 $f(a)=f(b)$

$\Rightarrow f(b)=f(a) \Rightarrow b\sim_f a$

对称性成立

(iii) 传递性（自己验证）

3. 设 $m\in\mathbb{Z}$ 且 $m\neq 0$，$a\in\mathbb{Z}$

如果 $\exists\, b\in\mathbb{Z}$ 使得 $a=bm$. 则称 m 整除 a. 记为 $m|a$.

注：整除的基本性质.

设 $m|a$、$m|b$. $x,y\in\mathbb{Z}$

则 $m|(xa+yb)$.

证：$m|a \Rightarrow \exists\, c\in\mathbb{Z}$. $a=cm$

$m|b \Rightarrow \exists\, d\in\mathbb{Z}$　$b=dm$

$xa+yb=(cx+dy)m$

$\Rightarrow m|(xa+yb)$

注：设 $a\in\mathbb{Z}$　$quo(a,m)$ 记 a 关于 m 的商

$rem(a,m)$ 记 a 关于 m 的余式

则 $m|a \Leftrightarrow rem(a,m)=0$

"$\Rightarrow$" $\exists\, b\in\mathbb{Z}$　$a=bm+0$

由余数的唯一性 $rem(a,m)=0$

"$\Leftarrow$" $a = \mathrm{quo}(a,m)\cdot m$. $\because \mathrm{quo}(a,m)\in\mathbb{Z}$

$\therefore m \mid a$.

定义：设 $m\in\mathbb{Z}^+$ 且 $m>1$ 令

$$\equiv_m := \{(a,b)\in\mathbb{Z}^2 \mid m \mid (a-b)\}$$

则称 $\equiv_m$ 是 $\mathbb{Z}$ 上关于 m 的同余关系

验证：$\equiv_m$ 是等价关系

(i) 设 $a\in\mathbb{Z}$ 由 $m\mid 0 \Rightarrow m\mid(a-a)\Rightarrow a\equiv_m a$

自反律成立

(ii) 设 $a,b\in\mathbb{Z}$. 如果 $a\equiv_m b$, 则 $m\mid(a-b)$

$\Rightarrow m\mid(b-a) \Rightarrow$ ~~则~~ $b\equiv_m a$

(iii) 设 $a,b,c\in\mathbb{Z}$. 如果 $a\equiv_m b$, $b\equiv_m c$

则 $m\mid(a-b)$, $m\mid(b-c)$, $\Rightarrow m\mid(a-b)+(b-c)$

$\Rightarrow m\mid(a-c) \Rightarrow a\equiv_m c$

传递律成立

命题 6.1 设 $a,b\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{Z}^+$ 且 $m>1$

则 $a\equiv_m b \iff \mathrm{rem}(a,m)=\mathrm{rem}(b,m)$

证：由带余除法：$\exists\, p,q\in\mathbb{Z}$ 使得

$a = pm + \mathrm{rem}(a,m)$

$b = qm + \mathrm{rem}(b,m)$

~~由 不妨设 $\mathrm{rem}(a,m)\geq\mathrm{rem}(b,m)$~~

则 $a-b=(p-q)m+[\underbrace{\mathrm{rem}(a,m)-\mathrm{rem}(b,m)}_{r}]$

不妨设 $\mathrm{rem}(a,m)\geq\mathrm{rem}(b,m)$. 则由余数

唯一性 $r=\mathrm{rem}(a-b,m)$

$a\equiv_m b \iff r=0 \iff \mathrm{rem}(a,m)=\mathrm{rem}(b,m)$ ∎

注 $a\equiv_m b$ 通常记作 $a\equiv b \mod m$.

~~设 对~~

定义：设 $\sim$ 是集合 S 上的等价关系

设 $a\in S$. $\overline{a}:=\{b\in S \mid a\sim b\}$

称为关于 a 的等价类. S 中所有等价类的集合, 记为 $S/\sim$, 称为 S 关于 $\sim$ 的商集.

例："$=$" $\overline{a}=\{a\}$ $S/_= = \{\{a\} \mid a\in S\}$

同班同学 "$\sim_c$" $\overline{a}:=$ a 所在的班的学生的集合

$S/\sim_c =$ 学校中所有的班

例：设 $f: S\to T$. $s\in S$ $f(s)=t$

$\overline{s}=f^{-1}(\{t\})$ 即 f 在 t 处的纤维

$S/\sim_f$ 是 f 是所有非空纤维的集合

例：$\equiv_2$

$\overline{0}=$ 偶数的集合

$\overline{1}=$ 奇数的集合

如果 $a\in\mathbb{Z}$, 当 a 为偶数时 $\overline{a}=\overline{0}$. 否则 $\overline{a}=\overline{1}$

$\mathbb{Z}/\equiv_2 = \{\overline{0},\overline{1}\}$

记 $\mathbb{Z}/\equiv_2$ 为 $\mathbb{Z}_2$

一般设 m 为大于 1 的整数

$\overline{0},\overline{1},\dots,\overline{m-1}$ 两两不同 (余数的唯一性)

$\forall a\in\mathbb{Z}$ $\overline{a}$ 必为 $\overline{0},\overline{1},\dots,\overline{m-1}$ 中某一个 (因为 $\mathrm{rem}(a,m)\in\{0,1,\dots,m-1\}$)

于是 $\mathbb{Z}_m=\{\overline{0},\overline{1},\dots,\overline{m-1}\}$

其中 $\mathbb{Z}_m$ 是 $\mathbb{Z}/\equiv_m$ 的简写.

注：设 $a\in\mathbb{Z}$ $\overline{a}$ 称为 a 关于 m 的剩余类

命题6.2 设 $\sim$ 是 S 上的等价关系

$a、b \in S$ 则

(i) $a \sim b \iff \bar{a} = \bar{b}$

(ii) $a \nsim b \iff \bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$

证: (i) "$\Rightarrow$" 设 $c \in \bar{a}$. 则 $a \sim c$.

$\because a \sim b$ $\therefore b \sim a$ 由 $b \sim a$, $a \sim c$

可知 $b \sim c$. 即 $c \in \bar{b}$.

于是 $\bar{a} \subset \bar{b}$. 同理 $\bar{b} \subset \bar{a}$

由此可知 $\bar{a} = \bar{b}$

反之: 设 $\bar{a} = \bar{b}$

$\because b \sim b$ $\therefore b \in \bar{b} \Rightarrow b \in \bar{a}$

$\Rightarrow a \sim b$.

(ii) "$\Rightarrow$" 假设 $c \in \bar{a} \cap \bar{b}$

则 $a \sim c$, $b \sim c$. 由对称和传递律

$a \sim b$ $\rightarrow\leftarrow$

"$\Leftarrow$" $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset \Rightarrow \bar{a} \neq \bar{b}$ (自反律)

$\Rightarrow a \nsim b$ (由(i)) $\square$

定义: 设 $\sim$ 是 S 上的等价关系,

H 是 S 关于 $\sim$ 的一个等价类

则 H 中的任何一元素称为 H 的一个代表元

注 设 $h \in H$. 则 $\bar{h} = H$

验证: 设 $H = \bar{a}$, 其中 a 是 S 中某元素

$h \in H \Rightarrow a \sim h \Rightarrow \bar{a} = \bar{h}$ (命题6.2(i))

$\Rightarrow \bar{h} = H$.

例 $\mathbb{Z}_3$ 中 ~~5的代表~~

$$\bar{5} = \{2, 5, 8, \dots, -1, -4, -7, \dots\}$$

$$= \{3k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \bar{2}.$$

定义: 设 $\sim$ 是 S 上等价关系

$$\pi: S \longrightarrow S/\sim$$

$$a \longmapsto \bar{a}$$

称为由 $\sim$ 诱导出的商映射(自然投射)

注：自然投射是满射

~~则 π / $S/\sim$~~ 例：$\pi: S \longrightarrow S/\sim_c$

π = "你是哪个班的？"

例：设 $f: S \longrightarrow T$. $\pi: S \longrightarrow S/\sim_f$

π 把 $s \in S$ 映到 s 所在的纤维

即设 $t = f(s)$. $\pi(s) = f^{-1}(\{t\})$.

例：设 $m \in \mathbb{Z}^+$ 且 $m > 1$

$$\pi: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_m$$
$$a \longmapsto \bar{a}$$

π 把 a 映为 a 模于 m 的剩余类

$$\pi: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2$$

$\pi(a) = \bar{0} \iff a$ 是偶数

$\pi(a) = \bar{1} \iff a$ 是奇数

等价关系的应用

1. 分类.

设 S 是集合. P 是由 S 的某些子集组成的集合. ~~如果~~.

(i) $\forall p \in P$, $p \neq \emptyset$

(ii) $\forall p_1, p_2 \in P$, $p_1 \neq p_2$, 我们有 $p_1 \cap p_2 = \emptyset$

(iii) S 是 P 中所有子集的并

即 $S = \bigcup_{p \in P} p$.

则称 P 是 S 的一个分割(partition)

~~命题~~6.3. ~~设~~ (i) 设 $\sim$ 是 S 上的等价关系

则 $S/\sim$ 是 S 的一个分割

(ii) 设 P 是 S 的一个分割. 定义 S 上的二元关系 $\sim_P$ 如下，设 $a, b \in S$

~~$a \sim b$~~ $a \sim_P b \iff \exists p \in P$. 使得 $a, b \in p$

则 $\sim_P$ 是等价关系.

证：(i) 设 $H \in S/\sim$，则 $\exists h \in S$ 使得 $H = \bar{h}$ $\because h \in \bar{h}$ $\therefore$ $H \neq \emptyset$. 设 $H_1, H_2 \in S/\sim$ 其代表元为 h_1, h_2. ~~由~~ 如果 $H_1 \neq H_2$ 则 $\bar{h}_1 \neq \bar{h}_2$. 由 ~~命题~~ 6.1 (i)

$$h_1 \not\sim h_2$$

$\forall a \in S$ $a \in \bar{a}$. 于是

$$a \in \bigcup_{H \in S/\sim} H \subset S$$

~~于是 S/~~

于是 $S/\sim$ 是 S 的一个分划

~~(ii)~~ (ii) $\forall a \in S$

$$a \in \bigcup_{p \in P} p$$

$\exists P_0 \in P$ 使得 $a \in P$ $a \sim_p a$

自反律成立.

设 $a \sim_p b$. 则 $\exists p \in P$ 使得

$a, b \in p \Rightarrow b, a \in P \Rightarrow b \sim_p a$

设 $a \sim_p b$, $b \sim_p c$. 则 $\exists P_1, P_2 \in P$ 使得 $a, b \in P_1$, $b, c \in P_2$ 于是 $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset \Rightarrow P_1 = P_2 \Rightarrow a, b, c \in P_1$ $\Rightarrow a \sim_p c$ 传递性成立 ∎

注：自己验证

$$\sim_{S/\sim} = \sim \text{ 和 } P = S/\sim_P.$$

映射的分解

~~设~~

定理 6.1 设 $f: S \longrightarrow T$ 映射 $\pi: S \longrightarrow S/\sim_f$ 是商映射 则 $\exists!$ 映射 $\bar{f}: S/\sim_f \longrightarrow T$ 使得 $f = \bar{f} \circ \pi$，且 $\bar{f}$ 是单射

证: 存在性

设 $\bar{f}: S/\sim_f \longrightarrow T$

$\bar{a} \longmapsto f(a)$

验证良定义: 设 $\bar{a}=\bar{b}$. 由命题 6.1(i)

$a \sim_f b$ 则 $f(a)=f(b)$. 由此可知

$f(\bar{a}) = f(\bar{b})$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & T \\ & S/\sim_f \arrow[u, "\bar{f}"'] \end{tikzcd}$$

$\forall a \in S$

$\bar{f}\circ\pi(a) = \bar{f}(\bar{a}) = f(a)$

$\Rightarrow f = \bar{f}\circ\pi$

单射

~~设 h: $f^*: S/\sim_f \to T$~~

设 $\bar{a}\neq\bar{b}$. 则 $a \not\sim_f b$ (命题6.2(ii))

$\Rightarrow f(a)\neq f(b) \Rightarrow \bar{f}(\bar{a}) \neq \bar{f}(\bar{b})$

$\Rightarrow \bar{f}$ 是单射

唯一性 设 $f^*: S/\sim_f \to T$

使得 $f=f^*\circ\pi$

$f(a) = f^*(\bar{a}) = \bar{f}(\bar{a}) \Rightarrow f^* = \bar{f}$ ∎

例: 设 $m\in\mathbb{Z}^+\setminus\{1\}$.

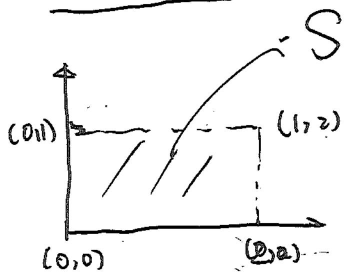
rem: $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$a \longmapsto \mathrm{rem}(a,m)$

$\mathrm{rem} = \overline{\mathrm{rem}}\circ\pi$.

$a \longrightarrow \bar{a} \longrightarrow$ 典型代表元 (最小正余数)

应用3 粘合



$\sim = \{((a,b),(c,d)) \in S^2 \mid (a,b)=(c,d)$ 或 $a=0, c=1, b=d$ 或 $c=0, a=1, b=d\}$

$S/\sim := \{\{(a,b)\} \mid 0<a<2, 0\le b\le 1\} \cup$

$\{\{(0,y),(2,y)\} \mid y\in[0,1]\}$

~~$S/\sim = $~~