回42

定理8.4 任何大于1的正整数都是若干个素数之积

例：$24 = 2^3 \cdot 3$

$4284179 = 541 \times 7919$

$829348951 = 104729 \times 1299709$

例：证明素数有无穷多个

证：假设只有有限多个素数 $p_1, \cdots, p_k$

令 $m = p_1 \cdots p_k + 1 > 1$

由定理8.4 m 是 $p_1, \cdots p_k$ 的若干幂次之积。不妨设 $p_1 \mid m$

则 $p_1 \mid (p_1 \cdots p_k + 1) \Rightarrow p_1 \mid 1$

$\rightarrow\leftarrow$

引理8.2 (素数的整除性质)

设 $a, b \in \mathbb{Z}$, p 是素数. 如果 $p \mid (ab)$ 则 $p \mid a$ 或 $p \mid b$.

证：设 $p \nmid a$. 令 $g = \gcd(p, a)$

则 $g \neq p \Rightarrow 1 \leq g < p$

$\because$ $g \mid p$ 且 p 是素数 $\therefore g = 1$

即 p 和 a 互素. 由 Bezout 关系

$\exists u, v \in \mathbb{Z}$ 使得

$$up + va = 1$$

$$\Rightarrow upb + v(ab) = b$$

$\because p \mid (upb)$ 和 $p \mid (ab)$ $\therefore p \mid b$ ▢

~~证/例~~

例 设 p 是素数. 证明 $p \mid \binom{p}{k}$, 其中 $1 \leq k < p$

由 $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} \Rightarrow p! = k!(p-k)!\binom{p}{k}$

$\Rightarrow p \mid \left(k!(p-k)!\binom{p}{k}\right)$

$\because p \nmid k!$, $p \nmid (p-k)!$ (引理8.2)

$\therefore p \mid \binom{p}{k}$ (引理8.2).

~~§1~~ 第2章 矩阵

§1 向量

行向量：$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是 $1\times n$ 矩阵

列向量：$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ 是 $n\times 1$ 的矩阵

a_i 称为向量的第 i 个坐标，$i=1,\cdots,n$

例 $A=(a_{ij})_{m\times n}$

$\vec{A}_i=(a_{i1}, a_{i2}, \cdots a_{in})$ 是 A 第i行的行向量。

$\vec{A}^{(j)}=\begin{pmatrix}a_{1j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix}$ 称为 A 的第j个列向量

§1.1 坐标空间

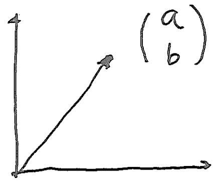
定义：$\mathbb{R}^{1\times n}=\{(a_1,\cdots a_n)\mid a_1,\cdots a_n\in\mathbb{R}\}$

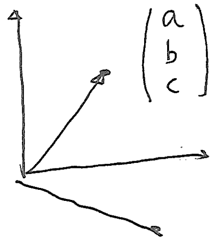
$\mathbb{R}^{n\times 1}=\{\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\mid a_1,\cdots a_n\in\mathbb{R}\}$

分别称为n维行向量空间和n维列向量空间

约定 记 $\mathbb{R}^{n\times 1}$ 为 $\mathbb{R}^n$。

例：$\mathbb{R}^2$





例 矩阵 A 如前例

$\vec{A}_1,\cdots,\vec{A}_m\in\mathbb{R}^{1\times n}$ $\quad \vec{A}^{(1)},\cdots\vec{A}^{(n)}\in\mathbb{R}^m$

记：$\vec{0}=\left.\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\right\}m \in\mathbb{R}^m$ 称为 0 向量

今后的定义和结论将对列向量而言

但它们对行向量也成立

§1.2 $\mathbb{R}^n$ 中的线性运算

设 $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，$\vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中两个向量

加法: $\vec{x}+\vec{y} := \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$

加法的运算规律.

交换律. $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$

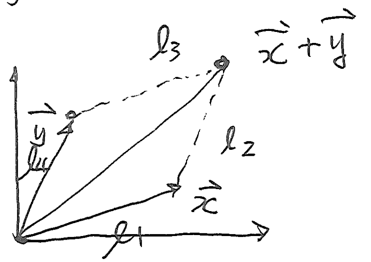
结合律 $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$

加法单位 $\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$

加法逆 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}=\vec{0}$

以上规律的验证是平凡的

几何意义 设 $\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$



l_1的斜率 $\frac{x_2}{x_1}$

l_2的斜率 $\frac{x_2+y_2-x_2}{x_1+y_1-x_1}=\frac{y_2}{y_1}$

l_3 ⋯⋯: $\frac{x_2+y_2-y_2}{x_1+y_1-y_1}=\frac{x_2}{x_1}$

l_4 ⋯⋯ $\frac{y_2}{y_1}$

$l_1 // l_3$; $l_2 // l_4$ 于是 $\vec{x}+\vec{y}$ 对应

由 $\vec{x}+\vec{y}$ 确定的一条对角线

数乘 设 $\alpha\in\mathbb{R}$

$\alpha\vec{x} := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$

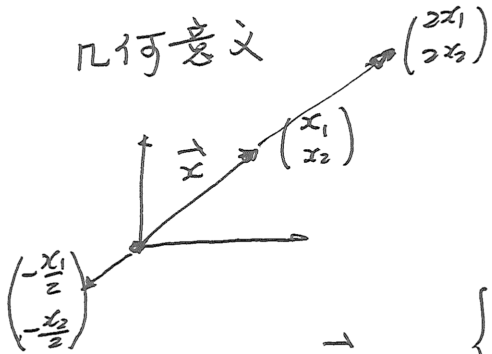
数乘的运算规律.

交换律 $(\alpha\beta)\vec{x}=(\beta\alpha)\vec{x}$

结合律 $\alpha(\beta\vec{x})=(\alpha\beta)\vec{x}$

数乘单位 $1\vec{x}=\vec{x}$

几何意义



$2\vec{x}=\begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$

$-\frac{1}{2}\vec{x}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_1 \\ -\frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix}$

$\alpha\vec{x}=\begin{cases} \text{沿}\vec{x}\text{放大}\alpha\text{倍}, & \alpha>0 \\ \text{沿}\vec{x}\text{反方向放大}\alpha\text{倍}, & \alpha<0 \end{cases}$

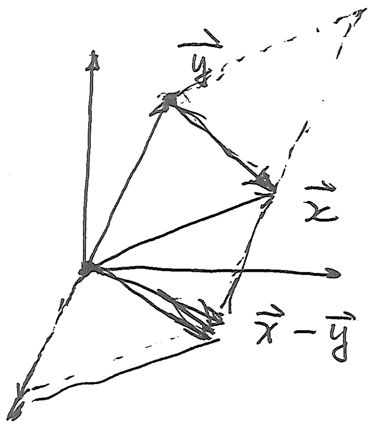
$\vec{0}$的方向任意.

分配律. $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$

$(\alpha+\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{x}$

$\alpha(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$.

例：$\vec{x}-\vec{y}$ 定义为 $\vec{x}+(-1)\vec{y}$



§1.3 线性相关性

定义：设 $\vec{u},\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k\in\mathbb{R}^n$. 如果存在 $\alpha_1,\dots\alpha_k\in\mathbb{R}$，使得

$$\vec{u}=\alpha_1\vec{v}_1+\cdots+\alpha_k\vec{v}_k$$

则称 $\vec{u}$ 是 $\vec{v}_1,\dots\vec{v}_k$ 的线性组合.

例：设 $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，$\vec{v}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

问 $\vec{u}$ 是不是 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$ 的线性组合

解：设 $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ 使得

$\vec{u}=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2$，即

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\2\alpha_1\\3\alpha_1\\4\alpha_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_2\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2\\2\alpha_1\\3\alpha_1\\4\alpha_1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow\ 4\alpha_1=1,\ 3\alpha_1=1\ \rightarrow\leftarrow$. 故 $\vec{u}$ 不是 $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ 的线性组合

例：设

$$(L):\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ \cdots\\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

令 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ &\cdots&\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}_{m\times n}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$

(L) 可改写为

$$x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$$ 即

$$x_1\vec{A}^{(1)}+\cdots+x_n\vec{A}^{(n)}=\vec{b}$$

于是 (L) 有解 $\Leftrightarrow$ $\vec{b}$ 是 $\vec{A}^{(1)},\dots\vec{A}^{(n)}$ 的线性组合

定义：设 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$，如果存在 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}$，不全为零，使得

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

则称 $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k$ 线性相关。否则称 $\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_k$ 线性无关。

例 判断 $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

是否线性相关

解：设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 = \vec{0}$$

即 $\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

即 $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

$\Rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ 线性无关

例：设

$$(H) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(H) 可改写为

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} m$$

即 $x_1 \vec{A}^{(1)} + \cdots + x_n \vec{A}^{(n)} = \vec{0}_m$

(H) 有非平凡解 $\Leftrightarrow \vec{A}^{(1)}, \cdots, \vec{A}^{(n)}$ 线性相关

(H) 只有平凡解 $\Leftrightarrow \vec{A}^{(1)}, \cdots \vec{A}^{(n)}$ 线性无关。

线性组合、线性相关和无关的几何意义

例：$\vec{v}\in\mathbb{R}^n$，$\vec{v}$线性相关 $\Leftrightarrow \vec{v}=\vec{0}$

$\vec{v}$ 线性相关 $\Leftrightarrow \exists\,\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha\neq 0$ 使得 $\alpha\vec{v}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{v}=\vec{0}$

例：设 $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^n$，$\vec{u},\vec{v}$ 线性相关

$\Leftrightarrow \vec{u},\vec{v}$ 同向或反向

证："$\Rightarrow$" $\exists\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，不全为零 使得

$$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\vec{0}$$

不妨设 $\alpha\neq 0$，则 $\vec{u}=-\frac{\beta}{\alpha}\vec{v}$

"$\Leftarrow$" 则 $\cancel{\alpha=\lambda\beta}$ $\vec{u}=\lambda\vec{v}$ 或 $\vec{v}=\mu\vec{u}$

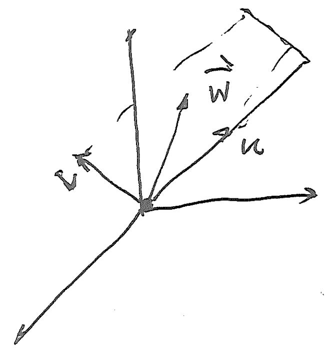
其中 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$，不妨设 $\vec{u}=\lambda\vec{v}$

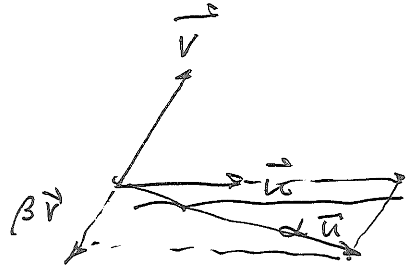
则 $\vec{u}-\lambda\vec{v}=\vec{0}$，$\vec{u},\vec{v}$ 线性相关

同：

例：设 $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^n$，$\vec{u},\vec{v}$ 线性无关

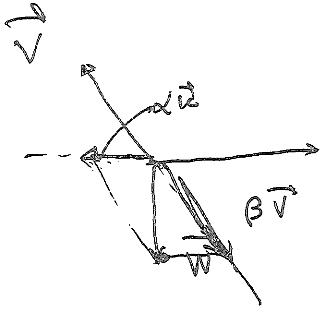
则 $\vec{w}$ 是 $\vec{u},\vec{v}$ 的线性组合 $\Leftrightarrow$ $\vec{w}$ 在 $\vec{u},\vec{v}$ 确定的平面上





证：设 $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$

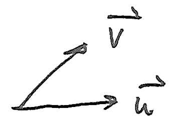
设 $\vec{w}$ 在 $\vec{u},\vec{v}$ 确定的平面上



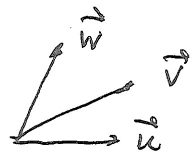
$\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$

例：在 $\mathbb{R}^2$ 中

$\vec{u},\vec{v}$ 线性无关



例 在 $\mathbb{R}^3$ 中



线性无关

命题1.1 设 $\vec{v_1},\dots,\vec{v_k}\in\mathbb{R}^n$，$1\le i\le k$

(i) 如果 $\vec{v_1},\dots,\vec{v_i}$ 线性相关，则 $\vec{v_1},\dots,\vec{v_i},\dots,\vec{v_k}$ 也线性相关

(ii) 如果 $\vec{v_1},\dots,\vec{v_i},\dots,\vec{v_k}$ 线性无关，则 $\vec{v_1},\dots,\vec{v_i}$ 也线性无关

(iii) $\vec{v_1},\dots,\vec{v_k}$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\vec{v_1},\dots,\vec{v_k}$ 中某个向量是其它向量的线性组合

(iv) 设 $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ 且 $\vec{v_1},\dots,\vec{v_k}$ 线性无关，则 $\vec{v},\vec{v_1},\dots,\vec{v_k}$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ $\exists!\ \alpha_1,\dots,\alpha_k$ 使得

$$\vec{v}=\alpha_1\vec{v_1}+\dots+\alpha_k\vec{v_k}.$$

证：(i) 设 $\alpha_1\vec{v_1}+\dots+\alpha_i\vec{v_i}=\vec{0}$，$\alpha_1,\dots,\alpha_i\in\mathbb{R}$ 不全为零，则 $\alpha_1\vec{v_1}+\dots+\alpha_i\vec{v_i}+0\vec{v_{i+1}}+\dots+0\vec{v_k}=\vec{0}$

因为 $\alpha_1,\dots,\alpha_i,\underbrace{0,\dots,0}_{k-i}$ 不全为零

所以 $\vec{v_1},\dots,\vec{v_i},\dots,\vec{v_k}$ 线性相关

(ii) 是 (i) 的逆否命题

(iii) "$\Rightarrow$" $\exists\ \alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{R}$，不全为零

使得 $\alpha_1\vec{v_1}+\alpha_2\vec{v_2}+\dots+\alpha_k\vec{v_k}=\vec{0}$

不妨设 $\alpha_1\neq0$，则

$$\vec{v_1}=\left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\vec{v_2}+\dots+\left(-\frac{\alpha_k}{\alpha_1}\right)\vec{v_k}$$

即 $\vec{v_1}$ 是 $\vec{v_2},\dots,\vec{v_k}$ 的线性组合

"$\Leftarrow$" 不妨设

$$\vec{v_1}=\beta_2\vec{v_2}+\dots+\beta_k\vec{v_k},\quad \beta_2,\dots,\beta_k\in\mathbb{R}$$

$$1\cdot\vec{v_1}+(-\beta_2)\vec{v_2}+\dots+(-\beta_k)\vec{v_k}=\vec{0}$$

$\Rightarrow$ $\vec{v_1},\vec{v_2},\dots,\vec{v_k}$ 线性相关

(iv) "$\Leftarrow$" 由条件和 (iii) 得出.

"$\Rightarrow$" 设 $\vec{v},\vec{v_1},\dots,\vec{v_k}$ 线性相关

则 $\exists\ \alpha,\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{R}$，不全为零

使得 $\alpha\vec{v}+\alpha_1\vec{v_1}+\dots+\alpha_k\vec{v_k}=\vec{0}$

$\because$ $\vec{v_1},\dots,\vec{v_k}$ 线性无关 $\therefore$ $\alpha\neq0$

于是 $\vec{v}=\left(-\frac{\alpha_1}{\alpha}\right)\vec{v_1}+\dots+\left(-\frac{\alpha_k}{\alpha}\right)\vec{v_k}$

唯一性得证:

设 $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v_1} + \dots + \lambda_k \vec{v_k}$

$\vec{v} = \mu_1 \vec{v_1} + \dots + \mu_k \vec{v_k}$

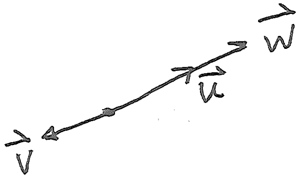
则 $(\lambda_1 - \mu_1)\vec{v_1} + \dots + (\lambda_k - \mu_k)\vec{v_k} = \vec{0}$

$\because$ $\vec{v_1}, \dots \vec{v_k}$ 线性无关

$\therefore$ $\lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_k = \mu_k$ □

例: 设 $\vec{u} = \lambda \vec{w}$, $\vec{v} = \mu \vec{w}$ 则 $\vec{u}, \vec{v}$ 线性相关

几何说明



$\vec{u}$ 与 $\vec{w}$ 同向或反向
$\vec{v}$ 与 $\vec{w}$ 同向或反向 $\Rightarrow$ $\vec{u}$ 与 $\vec{v}$ 同向或反向

$\Rightarrow$ $\vec{u}$ 与 $\vec{v}$ 线性相关

例: 设 $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{u_1}, \vec{u_2}$ 线性无关
$\vec{v_i}$ 是 $\vec{u_1}, \vec{u_2}$ 的线性组合, $i=1,2,3$
则 $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ 线性相关

几何说明: ~~$\vec{v_2}$ 在~~

~~情形1, $\vec{u_1}, \vec{u_2}$ 线性相关~~

$\vec{v_i}$ 在 $\vec{u_1}$ 和 $\vec{u_2}$ 所确定的平面上, $i=1,2,3$
则 $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ 共面. 如果 $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ 线性相关. 则 $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ 线性相关 (命题1.1 (i))
如果 $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ 线性无关. 则 $\vec{v_3}$ 在 $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ 所确定的平面上. 所以 $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ 线性相关

引理1.1 (线性组合引理)

设 $\vec{u_1}, \dots \vec{u_k}$; $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_l}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中两组向量. ~~如果每个 $\vec{v_j}$ 都是~~ $\vec{u_1}, \dots \vec{u_k}$ 的线性组合, $j=1,2,\dots,l$, 且 $l > k$, 则

$\vec{v_1}, \dots, \vec{v_l}$ 必然线性相关.

证: 设 $B=(b_{ij})_{m\times n}$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} b_{ij}\right)$$

设 $\vec{v_j}=\sum_{i=1}^{k} a_{ij}\vec{u_i}$, $j=1\dots l$, $a_{ij}\in\mathbb{R}$

考虑方程组 (H),

$$\sum_{j=1}^{l} a_{ij}x_j=0 \qquad i=1\dots k$$

因为 $l>k$. 所以 (H) 有非平凡解

$x_1=\alpha_1$, … $x_l=\alpha_l$

$$\sum_{j=1}^{l}\alpha_j\vec{v_j}=\sum_{j=1}^{l}\alpha_j\left(\sum_{i=1}^{k}a_{ij}\vec{u_i}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k}\left(\alpha_j a_{ij}\vec{u_i}\right)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\left(\alpha_j a_{ij}\vec{u_i}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{l}a_{ij}\alpha_j\right)\vec{u_i}=\vec{0} \qquad \square$$

推论1.1. $\mathbb{R}^n$ 中任意 $n+1$ 个向量都线性相关

证: 设 $\vec{e}^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\}_{n-1}$, $\vec{e}^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\}_{n-2}$

$\dots$, $\vec{e}^{(n)}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\}_{n-1}$

则 $\forall\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$.

$$\vec{x}=x_1\vec{e}^{(1)}+\dots+x_n\vec{e}^{(n)}$$

由线性组合引理，推论成立.

注: 推论1.1 说明 $\mathbb{R}^n$ 中

如果 $\vec{v_1},\dots\vec{v_k}\in\mathbb{R}^n$ 线性无关

则 $k\le n$.

显然 $\vec{e}^{(1)},\dots,\vec{e}^{(n)}$ 线性无关

~~由命题1.2(iv), $\forall\vec{x}\in V$~~

§1.4 极大线性无关子集(组)

定义: 设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 非空. 如果 S 中每个非空~~子集~~有限子集~~都~~是线性无关的. 则称 S 是线性无关集. 否则 S 是线性相关集.

例: 在 $\overset{S}{\overset{\|}{\mathbb{R}^{n}}}$ 中. $\{\vec{e}^{(1)}\}$ 是线性无关子集

$\{\vec{e}^{(1)}, \vec{e}^{(2)}\}, \cdots \{\vec{e}^{(1)}, \vec{e}^{(2)}, \dots, \vec{e}^{(n)}\}$

是线性无关子集. 但 S 中不存在含有 $n+1$ 个元素的线性无关子集

从序关系 "$\subset$" 的意义下. $\{\vec{e}^{(1)}, \dots, \vec{e}^{(n)}\}$ 是 S 中一个极大线性无关子集

定义: 设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 非空. $T \subset S$ 是线性无关的. 如果 $\forall \vec{v} \in S \setminus T$ $T \cup \{\vec{v}\}$ 是线性相关的

则称 T 是 S 的~~子~~极大线性无关子集

引理1.2 (扩充引理) 设 $S \subset \mathbb{R}^n$. 且 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in S$ 线性无关. 则 S 中有一个包含 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ 的极大线性无关子集.

证: 设 $P = \{T \subset S \mid \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in T,\ T \text{ 线性无关}\}$

则 $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \subset P$. 且 $\forall T \in P$ $|T| < n+1$. 于是 P 中存在~~个~~元素 M 满足 M 含有元素的个数是 P 最大的. 设 $M = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \dots \vec{v}_m\}$

$\forall \vec{v} \in S$ $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_k, \dots \vec{v}_m, \vec{v}$ 线性相关 ∎

例：设 $\vec{v_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\vec{v_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{v_3}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$

$S=\{\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}\}$ 求 S 中含有 $\vec{v_1}$ 的极大线性无关子集

解：$\alpha_1\vec{v_1}+\alpha_2\vec{v_2}=\vec{0} \iff$

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff \alpha_1=\alpha_2=0$$

于是 $\vec{v_1},\vec{v_2}$ 线性无关，而 $2\vec{v_1}+2\vec{v_2}=\vec{v_3}$

所以 $\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}$ 线性相关.

从而 $\{\vec{v_1},\vec{v_2}\}$ 是含有 $\vec{v_1}$ 的一个极大线性无关子集.

另解：$\alpha_1\vec{v_1}+\alpha_3\vec{v_3}=\vec{0}\iff\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_3=0\\ \alpha_3=0\\ \alpha_1+2\alpha_3=0\end{cases}\iff\alpha_1=\alpha_3=0$

于是 $\{\vec{v_1},\vec{v_3}\}$ 也是含有 $\vec{v_1}$ 的另一个极大线性无关子集.

注：$\{\vec{v_2},\vec{v_3}\}$ 也是 S 的极大线性无关集，但不含 $\vec{v_1}$

命题1.2 设 $S\subset\mathbb{R}^n$，$S\neq\emptyset$，$S\neq\{\vec{0}\}$

则 (i) S 中有极大线性无关子集

(ii) 设 T_1,T_2 是 S 的两个极大线性无关子集，则 $|T_1|=|T_2|$.

证：(i) 设 $\vec{v}\in S$ 且 $\vec{v}\neq\vec{0}$：则 $\{\vec{v}\}$ 线性无关，由扩充引理可知，S 中有极大线性无关集

(ii) 设 $T_1=\{\vec{u_1},\dots,\vec{u_k}\}$，$T_2=\{\vec{v_1},\dots,\vec{v_l}\}$

由 T_1 的极大性，线性无关性和命题1.1 (iv)，$\vec{v_i}$ 是 $\vec{u_1},\dots,\vec{u_k}$ 的线性组合，$i=1,\dots,l$. 由线性组合引理 $l\le k$. 同理 $k\le l$ ☐

推论1.2 设 $S\subset\mathbb{R}^n$，T 是 S 的极大无关子集，则 $\forall\vec{u}\in T$，$\vec{u}$ 可以唯一地写成 S 中元素的线性组合

证：由 ~~命题~~ 定义和命题1.1 (iv) 可得. ☐

§1.5 子空间

定义：设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 非空 如果

$\forall\ \vec{x},\vec{y}\in U$，$\alpha\in\mathbb{R}$，有

加法封闭 $\vec{x}+\vec{y}\in U$

数乘封闭 $\alpha\vec{x}\in U$

则称 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间（线性闭集）

命题1.3. 设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 则

U 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 $\Leftrightarrow$ $\forall k\in\mathbb{Z}^+$，

$\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_k\in U$，$\alpha_1,\cdots\alpha_k\in\mathbb{R}$

$$\alpha_1\vec{v}_1+\cdots+\alpha_k\vec{v}_k\in U$$

证："$\Leftarrow$" 取 $\vec{v}_1,\vec{v}_2\in U$，$\alpha_1=\alpha_2=1$

得出 $\vec{v}_1+\vec{v}_2\in U$。取 $\alpha\in\mathbb{R}$，$\alpha\vec{v}_1\in U$

"$\Rightarrow$" 对 k 归纳。

$k=1$. 由数乘封闭性可知命题成立

~~$k=2$. 由 $\alpha_1\vec{v}_1\in V$，$\alpha_2\vec{v}_2\in V$~~

~~$\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2\in V$ （加法封闭性）~~

设 $1\leq k<n$ 时 命题成立

设 $\vec{w}=\underbrace{\alpha_1\vec{v}_1+\cdots+\alpha_{k-1}\vec{v}_{k-1}}_{\vec{u}}+\underbrace{\alpha_k\vec{v}_k}_{\vec{v}}$

$\vec{u}\in U$ （归纳假设），$\vec{v}\in U$，$k=1$

$\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}\in U$ （加法封闭） $\boxtimes$

例：平凡的子空间，$\{\vec{0}\}$，$\mathbb{R}^n$

例：子空间中的平凡元素，设 $U\subset\mathbb{R}^n$

是子空间，则 $\vec{0}\in U$。

证 $\vec{u}\in U$ $0\cdot\vec{u}=\vec{0}\in U$。

例：解空间：

设 (H) $\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ \cdots\\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$

$A=\begin{pmatrix}a_{11},\cdots a_{1n}\\ \cdots\\ a_{m1},\cdots a_{mn}\end{pmatrix}$. 令 $V_A=\left\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\middle|\ x_1=\alpha_1,\cdots x_n=\alpha_n\ \text{是 (H) 的解}\right\}$

V_A 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间

称为 (H) 是解空间.

例. 证明: $\mathbb{R}^2$ 中的~~树~~非平凡子空间指是过原点的直线

证: 考虑过原点的线性方程

$$\alpha x+\beta y=0,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}\text{ 不全为零}$$

其解空间是 $\mathbb{R}^2$ 中非平凡子空间

设 U 是 $\mathbb{R}^2$ 中非平凡子空间.

则 $\exists\,\vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\in U$ 且 u_1,u_2 不全为零

如果 $\exists\,\vec{v}\in U$. 且 $\vec{u},\vec{v}$ 线性无关

则 $\{\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\mid\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}\subset U$

$$\underset{\mathbb{R}^2}{\shortparallel}\qquad \rightarrow\leftarrow.$$

$\therefore\ \forall\vec{v}\in U$, $\vec{u},\vec{v}$ 线性相关

由命题1.1 (iv) $\vec{v}=\lambda\vec{u}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

即 $U=\{\lambda\vec{u}\mid\lambda\in\mathbb{R}\}$ 是过原点以 $\vec{u}$ 为方向的直线.

子空间之间的运算

$\boxed{交}$: 设 U_1,U_2 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间

则 $U_1\cap U_2$ 也是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间

设 $\vec{u},\vec{v}\in U_1\cap U_2$

$\vec{u}+\vec{v}\in U_1$, $\vec{u}+\vec{v}\in U_2\Rightarrow\vec{u}+\vec{v}\in U_1\cap U_2$

同理 $\forall\alpha\in\mathbb{R}$. $\alpha\vec{u}\in U_1\cap U_2$

$\boxed{并}$: $U_1\cup U_2$ 一般不是子空间

设: ~~$\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{y}=($~~

$U_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}\middle|\ x\in\mathbb{R}\right\}$, $U_2=\left\{\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}\middle|\ y\in\mathbb{R}\right\}$

容易验证: U_1, U_2 是子空间

如果 $U_1\cup U_2$ 是子空间. 则

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\in U_1\cup U_2\ \rightarrow\leftarrow$$

(和). 设 $S, T \in \mathbb{R}^n$.

定义 $S+T=\{\vec{u}+\vec{v} \mid \vec{u}\in S, \vec{v}\in T\}$

如果 U_1, U_2 是子空间, 则

U_1+U_2 也是子空间

验证: 设 $\vec{u}, \vec{v} \in U_1+U_2, \alpha\in\mathbb{R}$

则存在 $\vec{u_1}, \vec{v_1} \in U_1$, $\vec{u_2}, \vec{v_2} \in U_2$

使得 $\vec{u}=\vec{u_1}+\vec{u_2}$, $\vec{v}=\vec{v_1}+\vec{v_2}$

$$\vec{u}+\vec{v}=(\vec{u_1}+\vec{u_2})+(\vec{v_1}+\vec{v_2})$$
$$=\Big[\underset{\underset{U_1}{\cap}}{(\vec{u_1}+\vec{v_1})}+\underset{\underset{U_2}{\cap}}{(\vec{u_2}+\vec{v_2})}\Big]\in U_1+U_2$$

$$\alpha\vec{u}=\Big[\underset{\underset{U_1}{\cap}}{\alpha\vec{u_1}}+\underset{\underset{U_2}{\cap}}{\alpha\vec{u_2}}\Big]\in U_1+U_2$$

$\square$

注. $U_1, U_2 \subset U_1+U_2$

$\forall \vec{u_1}\in U_1$, $\vec{u_1}=\vec{u_1}+\vec{0}\in U_1+U_2$ ✓

$$U_1\cap U_2 \begin{matrix}\subset U_1 \subset \\ \subset U_2 \subset\end{matrix} U_1+U_2$$

例: 设 U_1, U_2, U_3 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. $(U_1+U_2)\cap U_3$

$$=(U_1\cap U_3)+(U_2\cap U_3)$$

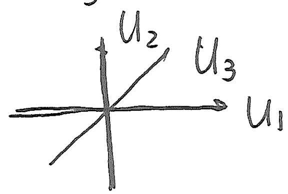
是否成立?

解: 不成立.

设 $U_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\}$. $U_2=\left\{\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix} \,\middle|\, y\in\mathbb{R}^2\right\}$

$U_3=\left\{\begin{pmatrix}z\\z\end{pmatrix} \,\middle|\, z\in\mathbb{R}\right\}$

$U_1+U_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \,\middle|\, x, y\in\mathbb{R}^2\right\}$
$=\mathbb{R}^2$



$(U_1+U_2)\cap U_3=U_3$. 但是

$(U_1\cap U_3)+(U_2\cap U_3)=\{\vec{0}\}+\{\vec{0}\}=\{\vec{0}\}$