

回忆: 设  $U_1, U_2$  是  $\mathbb{R}^n$  的子空间  
 $U_1 \cap U_2, U_1 + U_2$  也是  $\mathbb{R}^n$  的子空间

注:  $U_1, U_2$  都是  $U_1 + U_2$  的子集

验证:  $\forall \vec{u} \in U_1$

$$\vec{u} = \underbrace{\vec{u}_1}_{\in U_1} + \underbrace{\vec{0}}_{\in U_2} \in U_1 + U_2$$

例 设  $U_1, U_2, U_3$  是  $\mathbb{R}^n$  的子空间

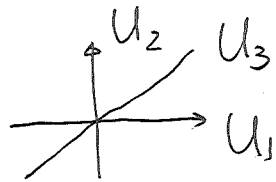
$$(U_1 + U_2) \cap U_3 = U_1 \cap U_3 + U_2 \cap U_3$$

是否成立?

解: 一般不成立 反例如下

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R} \right\}, U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$



$$(U_1 + U_2) \cap U_3 = U_3$$

$$U_1 \cap U_3 + U_2 \cap U_3 = \{\vec{0}\}$$

定义: 设  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  且  $S \neq \emptyset$  ①

$$\langle S \rangle := \left\{ \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k \mid k \in \mathbb{Z}^+, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in S, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \right\}$$

称为由  $\langle S \rangle$  生成的子空间.

验证  $\langle S \rangle$  是子空间

设  $\vec{u}, \vec{v} \in \langle S \rangle$ . 则存在  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \in S$ ,  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l \in S$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{R}$

使得

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k, \quad \vec{v} = \beta_1 \vec{v}_1 + \dots + \beta_l \vec{v}_l$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k + \beta_1 \vec{v}_1 + \dots + \beta_l \vec{v}_l \in \langle S \rangle$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \vec{u} = (\lambda \alpha_1) \vec{u}_1 + \dots + (\lambda \alpha_k) \vec{u}_k \in \langle S \rangle$$

命题 1.4 设  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  且  $S \neq \emptyset$ ,

$U$  是  $\mathbb{R}^n$  的子空间. 如果  $S \subset U$ .

$$\text{则 } \langle S \rangle \subset U$$

即:  $\langle S \rangle$  是包含  $S$  的关于 " $\subset$ " 的最小子空间

证: 设  $\vec{u} \in \langle S \rangle$ . 则  $\exists \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \in S$

$\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$  使得

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k$$

因为  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \in S \subset U$ , 所以  $\vec{u} \in U$

(命题1.3). 于是  $\langle S \rangle \subset U$ .

例: 设  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$\langle \vec{A}_1, \dots, \vec{A}_m \rangle \subset \mathbb{R}^{1 \times n}$  称为  $A$  的行空间

$\langle \vec{A}_1^{(n)}, \dots, \vec{A}_m^{(n)} \rangle \subset \mathbb{R}^m$  ... 列空间

$V_A$  为以  $A$  为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间.

$A$  的行和列空间分别记为  $V_r(A), V_c(A)$

## §1.5 基底与维数

(2)

定义: 设  $U \subset \mathbb{R}^n$  是子空间 如果

(i)  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in U$  线性无关

(ii)  $U = \langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \rangle$

则称  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  是  $U$  的一组基

引理1.3 设  $U \subset \mathbb{R}^n$  是子空间. 则  
 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  是  $U$  的基  $\Leftrightarrow \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  是  $U$  的极大线性无关组

证: " $\Leftarrow$ " 由命题1.3和推论1.2可知

$$U = \langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \rangle$$

于是  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  是  $U$  的基底

" $\Rightarrow$ " 由定义可知:  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  线性无关

且  $\vec{u} \in \langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \rangle$ . 于是

$\vec{u}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  线性相关 (命题1(ii))

于是  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  是  $U$  的极大线性无关组

# 命题1.5 (基底的基本性质)

设  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  是子空间, 则

(i) 如果  $U \neq \{0\}$ , 则  $U$  有基底

(ii) 设  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$  和  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l$  是  $U$  的两组基, 则  $k=l$ .

(iii) ~~设  $\vec{u} \in U$~~  设  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$  是  $U$  的一组基, 则  $\forall \vec{u} \in U, \exists! \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$

使得  $\vec{u} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k$

证: (i) 由命题1.2(i),  $U$  有极大线性无关组

由引理1.3,  $U$  有基底

(ii) 由命题1.2(ii) 和引理1.3,  $k=l$

(iii) 由命题1.1(iv), 直接可得

定义: 设  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  是子空间且  $U \neq \{0\}$

设  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  是  $U$  的一组基, 则称  $k$  是

$U$  的维数, 记做  $\dim_{\mathbb{R}} U$  或  $\dim U$ .

当  $U = \{0\}$  时,  $\dim U$  定义为 0.

注 由命题1.5 (i), (ii) 可知, (3)

$U$  的维数是良定义的.

例:  $\mathbb{R}^n$  的一组基底是  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$

于是  $\dim \mathbb{R}^n = n$

$\mathbb{R}^{1 \times n}$  有基底  $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$

于是  $\dim \mathbb{R}^{1 \times n} = n$  [它们称为标准基]

注: 子空间的基底不唯一

例:  $\mathbb{R}^2$  中  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  是一组基

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  也是一组基

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

例 说明  $\mathbb{R}^n$  中一维子空间都是过原点的直线

解: 设  $U \subseteq \mathbb{R}^n, \dim U = 1, \vec{u}$  是  $U$  的基

$$U = \{ \lambda \vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

设  $V$  是  $\mathbb{R}^n$  的子空间,  $\dim V = 2$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$  是  $V$  的一组基 则

$$V = \{ \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \}$$

定理 1.1 (扩充定理)

设  $U \subset \mathbb{R}^n$  是子空间,  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \in U$  线性无关. 则 存在  $\vec{u}_{k+1}, \dots, \vec{u}_d$  使得

$$\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{u}_{k+1}, \dots, \vec{u}_d$$

是  $U$  的一组基

证: 由扩充引理,  $U$  中有极大线性无关组  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{u}_{k+1}, \dots, \vec{u}_d$

于是 定理由引理 1.3 可得 图

★  $\rightarrow$  [子空间定理]

例: 设  $U, V$  是  $\mathbb{R}^n$  的两个子空间. 设  $U \subset V$ . 证  $\dim U = \dim V$  则  $U = V$

证: 不妨设  $\dim U \neq 0$ .

证: 设  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$  是  $U$  的一组基 ④

由扩充定理, 存在  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l$  使得

$$\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l$$

是  $V$  的基, 于是  $\dim U = k, \dim V = k+l$

于是  $l=0$ .  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$  也是  $V$  的基.

$$V = \langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \rangle = U \quad \square$$

命题 1.6 设  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$  且  $V = \langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \rangle$

则  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  中的极大线性无关组是  $V$  的一组基

证: 不妨设  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d$  是  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  的一个极大线性无关组 ( $d \leq k$ )

$$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d \rangle$$

由命题 1.4

$$\langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \rangle \subset \langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \rangle = \langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d \rangle$$

$$\begin{matrix} U \\ V \end{matrix}$$

$\square$

例: 设  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

计算  $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$  的一组基

解: 由上述命题, 我们只要找  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  的一个极大线性无关组即可

显然  $\vec{v}_1, \vec{v}_3$  是线性无关的

$$\text{设 } \vec{v}_2 = \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_3$$

$$\text{解} \begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases} \quad \text{有解} \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

于是  $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_3 \Rightarrow \{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$  是极大线性无关子集. 从而  $\vec{v}_1, \vec{v}_3$  是  $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$  的一组基.  $\square$

$\S =$  矩阵的秩

设  $A$  是  $m \times n$  阶实矩阵

$V_r(A)$  的维数称为  $A$  的行秩 (row rank).  $V_c(A)$  的维数称为  $A$  的列秩 (column rank)

定理 2.1. 矩阵  $A$  的行秩和列秩相等  $\textcircled{5}$

$$\text{例: 设 } E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

称为  $n$  阶单位矩阵.

$$V_r(E_n) = \langle \underbrace{(1, 0, \dots, 0)}_{\vec{e}_1}, \underbrace{(0, 1, 0, \dots, 0)}_{\vec{e}_2}, \dots, \underbrace{(0, \dots, 0, 1)}_{\vec{e}_n} \rangle$$

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$\text{于是 } \alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

$\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  线性相关

由此可知  $\dim V_r(E_n) = n \Rightarrow E_n$  的行秩为  $n$

$$V_c(E_n) = \langle \vec{e}^{(1)}, \dots, \vec{e}^{(n)} \rangle$$

$$\Rightarrow \dim V_c(E_n) = n \Rightarrow E_n \text{ 的列秩为 } n.$$

回忆: 初等行变换

I: 交换两行的位置

II: 把一行乘以某数加到另一行上

III: 把一行数乘一个非零的数

引理2.1 设  $B$  是  $A$  通过有限次行变换得到的矩阵. 则

$$V_r(A) = V_r(B) \quad \text{且} \quad \dim V_c(A) = \dim V_c(B)$$

证: 先证:  $V_r(A) = V_r(B)$

设  $B$  是通过<sup>对A</sup>一次 I 类初等变换得到

$$\text{则} \quad \{\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_m\} = \{\vec{B}_1, \dots, \vec{B}_m\}$$

$$\text{于是} \quad \begin{matrix} \langle \vec{A}_1, \dots, \vec{A}_m \rangle = \langle \vec{B}_1, \dots, \vec{B}_m \rangle \\ \parallel \qquad \qquad \parallel \\ V_r(A) \qquad \qquad V_r(B) \end{matrix}$$

设  $B$  是通过对  $A$  一次 II 类初等行变换得到

$$\text{则:} \quad \vec{B}_k = \vec{A}_k, \quad k=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, m$$

$$\vec{B}_j = \alpha \vec{A}_i + \vec{A}_j$$

$$\text{于是} \quad \vec{B}_j \in V_r(A) \Rightarrow V_r(B) \subset V_r(A) \quad \text{命题1.4}$$

$$\vec{A}_j = \vec{B}_j - \alpha \vec{A}_i = \vec{B}_j - \alpha \vec{B}_i \in V_r(B)$$

$$\Rightarrow V_r(A) \subset V_r(B)$$

$$\text{于是} \quad V_r(A) = V_r(B).$$

设  $B$  通过对  $A$  一次 III 类初等变换得到 ⑥

$$\text{则} \quad \vec{B}_k = \vec{A}_k, \quad k=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, m$$

$$\text{且} \quad \vec{B}_i = \alpha \vec{A}_i, \quad \alpha \neq 0$$

$$\text{则} \quad \vec{B}_i \in V_r(A) \Rightarrow V_r(B) \subset V_r(A).$$

$$\vec{A}_i = \frac{1}{\alpha} \vec{B}_i \in V_r(B) \Rightarrow V_r(A) \subseteq V_r(B)$$

$$\text{于是} \quad V_r(A) = V_r(B)$$

由此可知, 当  $B$  是通过对  $A$  做了有限次初等行变换后,  $V_r(A) = V_r(B)$ .

再证:  $\dim V_c(A) = \dim V_c(B)$

设  $(H_A)$  是以  $A$  为系数矩阵的齐次线性方程组

$(H_B)$  是以  $B$  为系数矩阵的齐次线性方程组.

由 Gauss 消去法 (第一章定理2.1)

$(H_A)$  和  $(H_B)$  等价

不妨设  $\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(d)}$  是  $A_c(A)$  的一组基.

则  $\vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(d)}$  也是  $B_c(B)$  的一组基

断言的证明: ~~设~~

先证:  $\vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(d)}$  线性无关

假设  $\vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(d)}$  线性相关

则  $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ , 不全为零

使得  $\alpha_1 \vec{B}^{(1)} + \dots + \alpha_d \vec{B}^{(d)} = \vec{0}$

于是  $\alpha_1 \vec{B}^{(1)} + \dots + \alpha_d \vec{B}^{(d)} + 0 \cdot \vec{B}^{(d+1)} + \dots + 0 \cdot \vec{B}^{(n)} = \vec{0}$

即  $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  是  $H_B$  的解

$\therefore H_A$  和  $H_B$  等价

$\therefore \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  是  $H_A$  的解

于是  $\alpha_1 \vec{A}^{(1)} + \dots + \alpha_d \vec{A}^{(d)} + 0 \cdot \vec{A}^{(d+1)} + \dots + 0 \cdot \vec{A}^{(n)} = \vec{0}$   
即  $\alpha_1 \vec{A}^{(1)} + \dots + \alpha_d \vec{A}^{(d)} = \vec{0}$ .  $\rightarrow \leftarrow$  ⑦

再证:  $\vec{B}^{(d+1)}, \dots, \vec{B}^{(n)}$  ~~都是~~ 都是  $\vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(d)}$  的线性组合.

设  $j \in \{d+1, \dots, n\}$

则  $\vec{A}^{(j)} = \beta_1 \vec{A}^{(1)} + \dots + \beta_d \vec{A}^{(d)}$ , 其中  $\beta_1, \dots, \beta_d \in \mathbb{R}$

于是  $\beta_1 \vec{A}^{(1)} + \dots + \beta_d \vec{A}^{(d)} + 0 \cdot \vec{A}^{(d+1)} + \dots + 0 \cdot \vec{A}^{(j-1)} + (-1) \cdot \vec{A}^{(j)} + 0 \cdot \vec{A}^{(j+1)} + \dots + 0 \cdot \vec{A}^{(n)} = \vec{0}$

即  $\beta \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_d \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  是  $H_A$  的解  $\Rightarrow H_B$  的解

即  $\beta_1 \vec{B}^{(1)} + \dots + \beta_d \vec{B}^{(d)} - \vec{B}^{(j)} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{B}^{(j)} = \beta_1 \vec{B}^{(1)} + \dots + \beta_d \vec{B}^{(d)}$ .  $\square$

定理 2.1 的证明  $A$  是  $m \times n$  阶矩阵

当  $A = O_{m \times n}$  时 定理显然成立  
故可设  $A$  不是零矩阵

对  $m$  归纳  $m=1$

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$V_r(A) = \langle (a_1, a_2, \dots, a_n) \rangle \neq \langle \vec{0} \rangle$$

$$\Rightarrow \dim V_r(A) = 1$$

$$V_c(A) = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \neq \langle 0 \rangle$$

$$\therefore V_c(A) \subset \mathbb{R} \therefore \dim V_c(A) = 1$$

$m=1$  时定理成立

设  $A$  有  $m-1$  行时定理成立

考虑  $A$  有  $m$  行时. 由 Gauss 消去法

得到 ~~矩阵~~  $B$  阶梯型矩阵

$$B = \left( \begin{array}{ccccccc} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 & x & -x & \dots & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & x & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_r & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right)_{m \times n}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  都不为零

(8)

设  $C$  为  $B$  去掉第  $r$  行得到的矩阵

由归纳假设  $C$  的行秩 =  $C$  的列秩  
记为  $s$

不妨设  $\vec{C}_{i_1}, \dots, \vec{C}_{i_s}$  是  $V_r(C)$  的一组基. 若

$$\lambda \vec{B}_1 + \mu_1 \vec{C}_{i_1} + \dots + \mu_s \vec{C}_{i_s} = \vec{0} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

由  $\alpha_1 \neq 0$  和  $B$  的  $r$  阶梯型可知

$$\lambda \alpha_1 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \quad (\because \alpha_1 \neq 0)$$

$$\text{于} \frac{\mu_1}{\mu_s} \vec{C}_{i_1} + \dots + \vec{C}_{i_s} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \mu_1 = \dots = \mu_s = 0$$

即  $\vec{B}_1, \vec{C}_{i_1}, \dots, \vec{C}_{i_s}$  线性无关

$\Rightarrow \vec{B}_1$  它们是  $V_r(B)$  的基

$$\Rightarrow \dim V_r(B) = s+1$$

设  $\vec{c}^{(j_1)}, \vec{c}^{(j_2)}, \dots, \vec{c}^{(j_s)}$  线性无关  $V_c(A)$   
的一组基. 则由阶梯型可设

$$k < j_1 < j_2 < \dots < j_s$$

断言 1  $\vec{b}^{(k)}, \vec{b}^{(j_1)}, \dots, \vec{b}^{(j_s)}$  线性无关

断言 1 的证明: 设  $\lambda, \mu_1, \dots, \mu_s \in \mathbb{R}$

使得  $\lambda \vec{b}^{(k)} + \mu_1 \vec{b}^{(j_1)} + \dots + \mu_s \vec{b}^{(j_s)} = \vec{0} \in \mathbb{R}^m$   
考虑后  $m-1$  个坐标可知

$$\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_1 \vec{c}^{(j_1)} + \dots + \mu_s \vec{c}^{(j_s)} = \vec{0} \in \mathbb{R}^m$$

$$\Rightarrow \mu_1 = \dots = \mu_s = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \vec{b}^{(k)} = \vec{0} \Rightarrow \lambda \alpha_1 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

断言 1 成立

断言 2.  $\vec{b}^{(k)}, \vec{b}^{(j_1)}, \dots, \vec{b}^{(j_s)}$  是  $V_c(A)$

的一组基

设  $l \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k, j_1, \dots, j_s\}$  ⑨

$\exists \mu_1, \dots, \mu_s$  使得

$$\vec{c}^{(l)} = \mu_1 \vec{c}^{(j_1)} + \dots + \mu_s \vec{c}^{(j_s)}$$

$$\vec{b}^{(l)} - \mu_1 \vec{b}^{(j_1)} - \dots - \mu_s \vec{b}^{(j_s)} = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中  $\beta \in \mathbb{R}$ .

注意:  $\begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\beta}{\alpha} \vec{b}^{(k)}$

于是  $\vec{b}^{(l)} = \frac{\beta}{\alpha} \vec{b}^{(k)} + \mu_1 \vec{b}^{(j_1)} + \dots + \mu_s \vec{b}^{(j_s)}$ .

断言 2 成立

由上述两断言

$\vec{b}^{(k)}, \vec{b}^{(j_1)}, \dots, \vec{b}^{(j_s)}$  是  $V_c(B)$  的基

从而  $\dim V_c(B) = s+1$

由引理 2.1  $\dim V_r(A) = \dim V_r(B)$

$\dim V_c(A) = \dim V_c(B)$

$\Rightarrow \dim V_r(A) = \dim V_c(A)$   $\square$

定义: 设  $A$  是  $m \times n$  阶矩阵, 称  $\dim V_r(A)$  为  $A$  的秩, 记为  $\text{rank}(A)$  或  $r_A$

例. 计算阶梯型矩阵

$$B = \left( \begin{array}{ccc} \bullet & & \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & & \bullet \\ \bullet & & \bullet \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{pmatrix} \bullet & & \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & & \bullet \\ \bullet & & \bullet \end{pmatrix}} \right\} r$$

的秩.

解 由定理证明的归纳过程可知

$$\text{rank}(B) = r$$

也可通过阶梯型直接证明  $\text{rank}(B) = r$  图

例 计算

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ 的秩}$$

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rank}(A) = 2. \quad (10)$$

初等列变换

I. 互换两列

II. 把一列数乘一个数加到另一列上

III 对某列数乘一个非零的数.

由引理2.1 证明可类似得证.

设若  $A$  通过有限步初等列变换得到  $C$ . 则  $V_c(A) = V_c(C)$

由定理2.1  $\text{rank}(A) = \text{rank}(C)$

上例另一种算法.

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rank}(A) = 2.$$

# 矩阵秩的定义应用

定理2.2 设

$$(L) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

则  $(L)$  ~~秩~~ <sup>相容</sup>  $\Leftrightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(B)$

证: ~~证~~ 设  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

" $\Rightarrow$ " 设  $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in (L)$  的解

$$\text{则 } \vec{b} = \alpha_1 \vec{A}^{(1)} + \dots + \alpha_n \vec{A}^{(n)}$$

$$\Rightarrow \vec{b} \in V_c(A)$$

$$\Rightarrow \forall \vec{b}, \vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(n)} \in V_c(A)$$

$$\Rightarrow V_c(B) \subset V_c(A) \quad (\text{命题1.4})$$

$$\Rightarrow V_c(B) = V_c(A) \Rightarrow \text{rank}(B) = \text{rank}(A) \quad \text{定理2.1}$$

$$\Leftarrow \dim V_c(B) = \dim V_c(A) \quad (\text{定理2.1}) \quad \textcircled{11}$$

再由  $V_c(B) \supset V_c(A)$ , 可知

$$V_c(B) = V_c(A). \quad \text{见 §1.5 节中的例子}$$

$$\vec{b} \in V_c(A) \Rightarrow$$

$$\vec{b} = \alpha_1 \vec{A}^{(1)} + \dots + \alpha_n \vec{A}^{(n)}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in (L) \text{ 的解}$$

例: 证

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_1 = a_4 \end{cases}$$

$$\text{相容} \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$$

$$B = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & a_4 + a_1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & a_4 + a_1 + a_2 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \end{array} \right)$$

$\text{rank}(A) = 3. \quad \text{rank}(B) = 3 \Leftrightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$

由定理 2.2, 方程组相容  $\Leftrightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$

定理 2.3 利用定理 2.2 的记号

(L) 确定  $\Leftrightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(B) = n$ .

证: " $\Rightarrow$ " 由定理 2.2,  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ .

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

设  $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$  是 (L) 的唯一解.

若  $\text{rank}(A) < n$  则  $\exists \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ , 不全为零

使得  $\beta_1 \vec{A}^{(1)} + \dots + \beta_n \vec{A}^{(n)} = \vec{0}$

从而  $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$  是以 A 为矩阵的齐次线性方程 (12)

组的解: 由习题可知

$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}$  也是 (L) 的解且

$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \rightarrow \leftarrow$

" $\Leftarrow$ " 由定理 2.2 (L) 有解.  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

设  $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$  是 (L) 的另一组解. 则

$\alpha_1 \vec{A}^{(1)} + \dots + \alpha_n \vec{A}^{(n)} = \vec{b} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

$\beta_1 \vec{A}^{(1)} + \dots + \beta_n \vec{A}^{(n)} = \vec{b}$

$\Rightarrow (\alpha_1 - \beta_1) \vec{A}^{(1)} + \dots + (\alpha_n - \beta_n) \vec{A}^{(n)} = \vec{0}$

$\Rightarrow \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$

推论 2.1. 由以 A 为矩阵的齐次线性方程组只有平凡解  $\Leftrightarrow \text{rank}(A) = n$

证: 此时  $\vec{b} = \vec{0}$ . 于是  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$  由定理 2.3 推论成立.  $\square$

例: 上例中的方程组不可解是确定的  
这是因为  $\text{rank}(A)=3$ . 但方程有  
4个未知数.

定理 2.4 设  $(H)$  是以  $A_{m \times n}$  为系数  
矩阵的齐次线性方程组.  $V_A$  是  
 $(H)$  的解空间.

则  $\text{rank}(A) + \dim V_A = n$ .

证: 设  $r = \text{rank}(A)$ . 不妨设  
 $\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(r)}$  是  $V_c(A)$  的一组基

则  $\forall j \in \{r+1, \dots, n\}$  有  
 $\vec{A}^{(j)} = \alpha_{1j} \vec{A}^{(1)} + \dots + \alpha_{rj} \vec{A}^{(r)}$ ,  $\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{rj} \in \mathbb{R}$

即  $\alpha_{1j} \vec{A}^{(1)} + \dots + \alpha_{rj} \vec{A}^{(r)} - \vec{A}^{(j)} = \vec{0}$

换言之  $\vec{V}_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{rj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  是  $(H)$  的解

于是  $(H)$  有解  $\vec{V}_{r+1}, \dots, \vec{V}_n$ . (B)

由于它们的后  $n-r$  个坐标中只有 1 个  
非零且非零坐标出现在不同  
的位置. 于是  $\vec{V}_{r+1}, \dots, \vec{V}_n$  线性无关

设  $\vec{V} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{r+1} \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in V_A$  则

$$\vec{u} = \vec{V} + \beta_{r+1} \vec{V}_{r+1} + \dots + \beta_n \vec{V}_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in V_A$$

其中  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lambda_1 \vec{A}^{(1)} + \dots + \lambda_r \vec{A}^{(r)} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V} = -\beta_{r+1} \vec{V}_{r+1} - \dots - \beta_n \vec{V}_n$$

即  $\vec{V}_{r+1}, \dots, \vec{V}_n$  是  $V_A$  的一组基

$$\dim V_A = n - r. \quad \square$$