回忆：设 $A, B \in M_n(F)$. 如果 $\exists P \in GL_n(F)$ 使得 $B = P^{-1}AP$. 则称 $B$ 与 $A$ 相似，记为 $B \sim_s A$

验证 $\sim_s$ 是等价关系

自反：$\forall A \in M_n(F)$，$A = E^{-1}AE \Rightarrow A \sim_s A$

对称：设 $A \sim_s B$. 则 $\exists P \in GL_n(F)$ 使得

$$A = P^{-1}BP \Rightarrow B = (P^{-1})^{-1}AP^{-1}$$

传递：设 $A \sim_s B$，$B \sim_s C$. 则 $\exists P, Q \in GL_n(F)$

使得 $A = P^{-1}BP$，$B = Q^{-1}CQ$

$$\Rightarrow A = P^{-1}Q^{-1}C\cancel{QP} = (QP)^{-1}C(QP)$$

命题2.1（若干相似不变量）

设 $A, B \in M_n(F)$，$A \sim_s B$. 则

(i) $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$

(ii) $|A| = |B|$

(iii) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$

证：设 $P \in GL_n(F)$ 使得 $A = P^{-1}BP$

(i) $\because P$ 满秩 $\therefore \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$

(ii) 由行列式乘法定理

$$|A| = |P^{-1}BP| = |P^{-1}||B||P| = |P^{-1}||P||B|$$
$$= |P^{-1}P||B| = |B|$$

(iii) 习题课已证：$\forall M, N \in M_n(F)$

$$\mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$$

得 $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(P^{-1}BP) = \mathrm{tr}(BPP^{-1}) = \mathrm{tr}(B)$ 口

例：$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \not\sim_s \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ （$\because$ 它们秩不同）

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \not\sim_s \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ （$\because$ 当 $\mathrm{char}(F) \neq 2$ 时 它们行列式不同

而，当 $\mathrm{char}(F) = 2$ 时，它们迹不同）

例 证明：$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \not\sim_s \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E}$

假设 $P = \begin{pmatrix} p_{11}, & p_{12} \\ p_{21}, & p_{22} \end{pmatrix} \in GL_2(F)$，使得

$$\cancel{A} = P^{-1}P.$$

则 $PA = P \Rightarrow \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow p_{11} = p_{21} = 0 \Rightarrow P$ 不可逆 $\rightarrow\leftarrow$.

以后将证明: $\forall A \in M_n(F)$, $A^t \sim_s A$.

## §2.2. 线性算子的例子

零映射, $\mathcal{O}: V \to V$, $\vec{x} \mapsto \vec{0}$　在 $V$ 任何基底下的矩阵都是 $O_{n\times n}$

恒同~~映射~~: $\mathcal{E}: V \to V$, $\vec{x} \mapsto \vec{x}$　在 $V$ 任何基底下的矩阵都是 $E$

定义: 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$.

(i) 如果 $\mathcal{A}$ 可逆, 则称 $\mathcal{A}$ 是可逆算子

(ii) 如果 $\exists k \in \mathbb{Z}^+$, 使得 $\mathcal{A}^k = \mathcal{O}$
则称 $\mathcal{A}$ 是幂零算子

(iii) 如果 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是幂等算子.

②

命题2.2. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$
则 $\mathcal{A}$ 是单射 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$ 是满射
于是 $\mathcal{A}$ 是可逆算子 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$ 单 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$ 满.

证: ~~dim~~ 记 $K_{\mathcal{A}} = \ker(\mathcal{A})$, $I_{\mathcal{A}} = \mathrm{im}(\mathcal{A})$

由第一章推论7.1

$$\dim K_{\mathcal{A}} + \dim I_{\mathcal{A}} = \dim V$$

(第二章讲义3, 基本事实④)

$\mathcal{A}$ 是单射 $\Longleftrightarrow K_{\mathcal{A}} = \{\vec{0}\}$

$\Longleftrightarrow \dim(K_{\mathcal{A}}) = 0$

$\Longleftrightarrow \dim I_{\mathcal{A}} = \dim V$

$\Longleftrightarrow \mathcal{A}$ 是满射 $\boxed{}$

例: ① $\mathcal{D}: \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$, $p(x) \mapsto p'(x)$

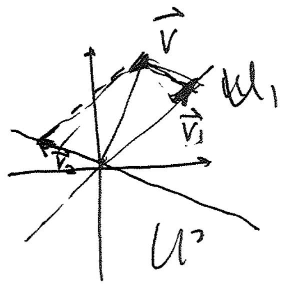
$$\mathcal{D}^n = \mathcal{O} \Rightarrow \mathcal{D} \text{ 幂零}$$

例: 设 $V = U_1 \oplus U_2$.
则 $\forall \vec{v} \in V$, $\exists!\ \vec{v_1} \in U_1$, $\vec{v_2} \in U_2$
使得 $\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$

定义：$\pi_1: \begin{array}{l} V \longrightarrow V \\ \vec{v} \longmapsto \vec{v_1} \end{array}$ 称为 $V$ 到 $U_1$ 的

投影 设 $\vec{w} \in V$，$\vec{w_1} = \pi_1(\vec{w})$

则 $\exists\, \vec{v_2}, \vec{w_2} \in U_2$ 使得




$$\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$$
$$\vec{w} = \vec{w_1} + \vec{w_2}$$

设 $\alpha, \beta \in F$ $\quad \alpha\vec{v} + \beta\vec{w} = \underbrace{(\alpha\vec{v_1} + \beta\vec{w_1})}_{\in\, U_1} + \underbrace{(\alpha\vec{v_2} + \beta\vec{w_2})}_{\in\, U_2}$

于是 $\pi_1(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha\vec{v_1} + \beta\vec{w_1}$

$$= \alpha\pi_1(\vec{v}) + \beta\pi_1(\vec{w}).$$

$$\pi_1 \in \mathcal{L}(V)$$

$$\pi_1^2(\vec{v}) = \pi_1(\vec{v_1}) = \vec{v_1} = \pi_1(\vec{v})$$

$\Rightarrow \pi_1^2 = \pi_1$ 　是幂等的

§2.3 代数同构.

$(\mathcal{L}(V), +, 0, 数乘)$ 是 $F$ 上线性空间

$(\mathcal{L}(V), +, 0, \circ, \mathcal{E})$ 是环（非交换的）

注意到：线性空间 $\mathcal{L}(V)$ 和环 $\mathcal{L}(V)$ 满足下列

一致性条件（compatibility condition）

$\forall\, \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$，$\alpha, \beta \in F$

$$(\alpha\mathcal{A}) \circ (\beta\mathcal{B}) = \alpha\beta(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})$$

验证：$\forall\, \vec{x} \in V$

$(\alpha\mathcal{A}) \circ (\beta\mathcal{B})(\vec{x}) = (\alpha\mathcal{A})(\beta\mathcal{B}(\vec{x}))$

$= \alpha(\mathcal{A}(\beta\mathcal{B}(\vec{x}))) = \alpha\beta\,\mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{x})) = \alpha\beta\,\mathcal{A} \circ \mathcal{B}(\vec{x})$

称此种 $(\mathcal{L}(V), +, 0, 数乘, \circ, \mathcal{E})$

是一个 $F$ 上的代数．同理．

$(M_n(F), +, O_{n\times n}, 数乘, \cdot, E_n)$

也是一个代数

定理2.2 设 $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$ 是 $V$ 的一组基

$\Phi$：$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(V) & \longrightarrow & M_n(F) \\ \mathcal{A} & \longmapsto & A \end{array}$

其中 $A$ 是 $\mathcal{A}$ 在 $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$ 下的矩阵

则 $\Phi$ 既是线性同构也是环同态

证：由定理1.2，$\Phi$ 是线性同构.

设 $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{L}(V)$. 由定理1.3

$$\Phi(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}) = AB = \Phi(\mathcal{A})\Phi(\mathcal{B}) \quad \square$$

$$A=\Phi(\mathcal{A})$$

推论2.1 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，

则 (i) $\mathcal{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow$ $A$ 可逆

(ii) $\mathcal{A}$ 幂零 $\Leftrightarrow$ $A$ 幂零（即 $A^k=O_{n\times n}$，$k$ 是某个正整数）

(iii) $\mathcal{A}$ 幂等 $\Leftrightarrow$ $A$ 幂等（即 $A^2=A$）

证：(ii) $\mathcal{A}^k=O \Leftrightarrow \Phi(\mathcal{A}^k)=O_{n\times n} \Leftrightarrow A^k=O_{n\times n}$

(i)，(iii) 类似.

注：矩阵的可逆性，幂零性，幂等性都是相似不变量

## §2.4 核像分解

记号 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. $K_{\mathcal{A}}=\ker(\mathcal{A})$

$$I_{\mathcal{A}}=\operatorname{im}(\mathcal{A})$$

此时 $I_{\mathcal{A}}, K_{\mathcal{A}}\subset V$ 中的子空间

问题：在什么条件下：

$$V=K_{\mathcal{A}}\oplus I_{\mathcal{A}}\ ?$$

例：$\mathcal{A}: F^2\longrightarrow F^2$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\longmapsto \underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

$$K_{\mathcal{A}}=\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix}\middle|\,\alpha\in F\right\}. \quad I_{\mathcal{A}}=\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix}\middle|\,\alpha\in F\right\}$$

$$K_{\mathcal{A}}\cap I_{\mathcal{A}}\neq\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow K_{\mathcal{A}}+I_{\mathcal{A}} \text{ 不是直和}$$

定理2.3（核像分解第一定理）

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 则

$$V=K_{\mathcal{A}}\oplus I_{\mathcal{A}} \Longleftrightarrow \operatorname{rank}(\mathcal{A})=\operatorname{rank}(\mathcal{A}^2)$$

证：断言1 $I_{\mathcal{A}^2}\subset I_{\mathcal{A}}$

断言1的证明：设 $\vec{v}\in I_{\mathcal{A}^2}$

则 $\exists\,\vec{u}\in V$ 使得

$$\vec{v}=\mathcal{A}^2(\vec{u})=\mathcal{A}(\mathcal{A}(\vec{u}))$$

断言1成立

断言2 $K_A \subset K_{A^2}$

断言2的证明 $\forall \vec{v} \in K_A$

$A(\vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow A^2(\vec{v}) = A(\vec{0}) = \vec{0}$

"$\Rightarrow$" 设 $V = K_A \oplus I_A$. 由 $A$ 的秩的定义

只要证明: $I_A = I_{A^2}$ 即可

由断言1, 只要证: $I_A \subset I_{A^2}$

设 $\vec{v} \in I_A$. 则 $\exists\, \vec{x} \in V$, 使得 $\vec{v} = A(\vec{x})$

$\exists\, \vec{y} \in K_A$, $\vec{z} \in I_A$ 使得 $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$

$\vec{v} = A(\vec{x}) = A(\vec{y}+\vec{z}) = A(\vec{y}) + A(\vec{z})$

$= A(\vec{z})$

$\because$ ~~A∈~~ $\vec{z} \in I_A$. $\therefore \exists\, \vec{w} \in V$, 使得

$\vec{z} = A(\vec{w}) \Rightarrow \vec{v} = A^2(\vec{w}) \in I_{A^2}$

即 $I_A = I_{A^2} \Rightarrow \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^2)$

"$\Leftarrow$" 设 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^2)$

由第一章推论1

$\dim(I_A) + \dim(K_A) = \dim V$ --- ①

$\dim(I_{A^2}) + \dim(K_{A^2}) = \dim V$ --- ②

$\because \dim(I_A) = \dim(I_{A^2})$ $\therefore \dim(K_A) = \dim(K_{A^2})$

~~⊕~~ 由断言2. $K_A = K_{A^2}$

设 $\vec{x} \in K_A \cap I_A$.

则 $\exists\, \vec{y} \in V$ 使得 $\vec{x} = A(\vec{y})$ 且 $A(\vec{x}) = \vec{0}$

于是 $A^2(\vec{y}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{y} \in K_{A^2} \Rightarrow \vec{y} \in K_A$

于是 $\vec{x} = \vec{0}$

即 $K_A + I_A$ 是直和

$\dim(K_A \oplus I_A) = \dim K_A + \dim I_A$
(维数公式或第一章推论1)

$= \dim V$ (由 ①)

$\Rightarrow$ ~~dim~~ $V = K_A \oplus I_A$ □

注：上述定理自来自表，沈洁于常州工学院学报，27卷，第2期 2014年4月）

例：设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，$k \in \mathbb{Z}^+$ 满足

$$\mathcal{A}^k = \mathcal{A}$$

则 $V = K_{\mathcal{A}} \oplus I_{\mathcal{A}}$

证：$\because \operatorname{rank}(\mathcal{A}) \geq \operatorname{rank}(\mathcal{A}^2) \geq \cdots \geq \operatorname{rank}(\mathcal{A}^k) = \operatorname{rank}(\mathcal{A})$

$\therefore \operatorname{rank}(\mathcal{A}) = \operatorname{rank}(\mathcal{A}^2)$.

由核像分解第一定理．$V = K_{\mathcal{A}} \oplus I_{\mathcal{A}}$

## §2.5 核核分解

回忆：设 $A \in M_n(F)$

$$F[A] = \left\{ \sum_{i=0}^{k} \alpha_i A^i \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\}$$

是交换环，$\forall\, p(t) \in F[t]$

$p$ 在 $t = A$ 处的赋值为 $p(A)$

例 设 $p(t) = t^2 + 2t - 3$

$p(A) = A^2 + 2A - 3E$

同样：设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$

$$F[\mathcal{A}] = \left\{ \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \mathcal{A}^i \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\}$$ 是交换环

$$\varphi: \quad F[t] \longrightarrow F[\mathcal{A}]$$

$$p(t) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i t^i \longmapsto p(\mathcal{A}) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \mathcal{A}^i$$ 也是环（同态）

例 $p(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^2 + 2\mathcal{A} - 3\mathcal{A}^0 = \mathcal{A}^2 + 2\mathcal{A} - 3\mathcal{E}$.

定理2.4（核核分解定理）

设 $f \in F[t]$．$f = pq$，其中 $p, q \in F[t]$ 且 $\gcd(p, q) = 1$

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 满足 $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$．则

$$V = K_{p(\mathcal{A})} \oplus K_{q(\mathcal{A})}.$$

证：$\because \gcd(p, q) = 1 \quad \therefore \exists\, u, v \in F[t]$

使得 $u(t)p(t) + v(t)q(t) = 1$

$$\Longrightarrow u(\mathcal{A}) \circ p(\mathcal{A}) + v(\mathcal{A}) \circ q(\mathcal{A}) = \mathcal{E}. \quad (*)$$

⑦

由 (*) 可知 $\forall \vec{x} \in V$

$$\vec{x} = u(\mathcal{A}) \circ p(\mathcal{A})(\vec{x}) + v(\mathcal{A}) \circ q(\mathcal{A})(\vec{x}) \quad (**)$$

验证：由 (*)

$$\vec{x} = \cancel{u(\mathcal{A})}\ \mathcal{E}(\vec{x}) = [u(\mathcal{A}) \circ p(\mathcal{A}) + v(\mathcal{A}) \circ q(\mathcal{A})](\vec{x})$$

$$= u(\mathcal{A}) \circ p(\mathcal{A})(\vec{x}) + v(\mathcal{A}) \circ q(\mathcal{A})(\vec{x})$$

(**) 成立

先证：$K_{p(\mathcal{A})} \cap K_{q(\mathcal{A})} = \{\vec{0}\}$ (***)

设 $\vec{x} \in K_{p(\mathcal{A})} \cap K_{q(\mathcal{A})}$ 则

$$u(\mathcal{A}) \circ p(\mathcal{A})(\vec{x}) = u(\mathcal{A})(p(\mathcal{A})(\vec{x})) = u(\mathcal{A})(\vec{0}) = \vec{0}$$

同理 $v(\mathcal{A}) \circ q(\mathcal{A})(\vec{x}) = \vec{0}$

由 (**) $\Rightarrow$ $\vec{x} = \vec{0}$. (***) 成立

再证：$V = K_{p(\mathcal{A})} + K_{q(\mathcal{A})}$ (****)

设 $\vec{x} \in V$, $\vec{y} = u(\mathcal{A}) \circ p(\mathcal{A})(\vec{x})$

$\vec{z} = v(\mathcal{A}) \circ q(\mathcal{A})(\vec{x})$

由 (**) $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$

$$q(\mathcal{A})(\vec{y}) = q(\mathcal{A}) \circ u(\mathcal{A}) \circ p(\mathcal{A})(\vec{x})$$

$$= u(\mathcal{A}) \circ q(\mathcal{A}) \circ p(\mathcal{A})(\vec{x}) \quad [\text{环同态}]$$

$$= u(\mathcal{A}) \circ (qp)(\mathcal{A})(\vec{x})$$

$$= u(\mathcal{A}) \circ f(\mathcal{A})(\vec{x}) = u(\mathcal{A}) \circ O(\vec{x}) = \vec{0}.$$

$\Rightarrow \vec{y} \in K_q$. 同理 $\vec{z} \in K_p$.

(****) 成立

由 (***) 和 (****) $V = K_{p(\mathcal{A})} \oplus K_{q(\mathcal{A})}$.

例：设 $F = \mathbb{R}$. $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 满足 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{E}$

证明 $\operatorname{rank}(\mathcal{A} + \mathcal{E}) + \operatorname{rank}(\mathcal{A} - \mathcal{E}) = \dim V$

证：设 $f(t) = t^2 - 1 = \underbrace{(t+1)}_{p}\underbrace{(t-1)}_{q}$. $\gcd(p, q) = 1$

~~由上述定~~理 $p(\mathcal{A}) = \mathcal{A} + \mathcal{E}$, $q(\mathcal{A}) = \mathcal{A} - \mathcal{E}$

由上述定理 $K_{\mathcal{A}+\mathcal{E}} \oplus K_{\mathcal{A}-\mathcal{E}} = V$

$\Rightarrow \dim K_{\mathcal{A}+\mathcal{E}} + \dim K_{\mathcal{A}-\mathcal{E}} = \dim V$

$\Rightarrow \dim V - \operatorname{rank}(\mathcal{A}+\mathcal{E}) + \dim V - \operatorname{rank}(\mathcal{A}-\mathcal{E}) = \dim V$

$\Rightarrow$ 等式成立 $\square$