回忆：引理4.4

设 $A=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}\in M_n(F)$

其中 $A_1\in M_d(F)$, $A_2\in M_{n-d}(F)$

则 $\mu_A=\operatorname{lcm}(\mu_{A_1}, \mu_{A_2})$.

定理4.1.

(i) 设 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & A_k \end{pmatrix}_{n\times n}$

其中 $A\in M_n(F)$, $A_i\in M_{d_i}(F)$, $i=1,\cdots,k$

则 $\mu_A=\operatorname{lcm}(\mu_{A_1},\cdots\mu_{A_k})$

(ii) 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 且

$$V=U_1\oplus\cdots\oplus U_k$$

其中 U_i 是 $\mathcal{A}$-子空间. 设 $\mathcal{A}_i=\mathcal{A}|_{U_i}$

$i=1,\cdots,k$

则 $\mu_{\mathcal{A}}=\operatorname{lcm}(\mu_{\mathcal{A}_1},\cdots,\mu_{\mathcal{A}_k})$

证：(i) 对 k 归纳.

$k=1$. 平凡

设 $k>1$ 且结论对 $k-1$ 成立. 设

$$B=\begin{pmatrix} A_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & A_{k-1} \end{pmatrix}$$

则由归纳假设

$$\mu_B=\operatorname{lcm}(\mu_{A_1},\cdots\mu_{A_{k-1}})$$

因为 $A=\begin{pmatrix} B & O \\ O & A_k \end{pmatrix}$. 所以

$$\mu_A=\operatorname{lcm}(\mu_B,\mu_{A_k}) \quad [\text{引理4.4}]$$

$$=\operatorname{lcm}(\operatorname{lcm}(\mu_{A_1},\cdots\mu_{A_{k-1}}),\mu_{A_k})$$

$$=\operatorname{lcm}(\mu_{A_1},\cdots,\mu_{A_{k-1}},\mu_{A_k})$$

(ii) 设 U_i 的基是 $\vec{e}_{i1}, \cdots, \vec{e}_{i,d_i}$. $i=1,\cdots k$. A_i 是 $\mathcal{A}_i$ 在该基下的矩阵, $i=1,2,\cdots k$.

由定理 3.1 及其证明可知. 算子 $\mathcal{A}$ 在 $\vec{e}_{11},\cdots,\vec{e}_{1d_1},\cdots,\vec{e}_{k,1},\cdots,\vec{e}_{k,d_k}$ 下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & A_k \end{pmatrix}$$

由 (i) $\mu_A = \mathrm{lcm}(\mu_{A_1}, \cdots \mu_{A_k})$

由命题 4.1

$\mu_{\mathcal{A}} = \mathrm{lcm}(\mu_{A_1}, \cdots, \mu_{A_k})$ ▨

作业题. 证 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 证明 ②

$\mathcal{A}$ 可逆 $\Longleftrightarrow$ $\mu_{\mathcal{A}}(0) \neq 0$

证: $\Longleftarrow$ 设 $p \in F[t]$

$p = t^{m} + \alpha_{m-1} t^{m-1} + \cdots + \alpha_0$, $\alpha_i \in F$

使得 $p(\mathcal{A}) = O$ 且 $p(0) \neq 0$.

则 $\alpha_0 \neq 0$ 且

$O = p(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^{m} + \alpha_{m-1}\mathcal{A}^{m-1} + \cdots + \alpha_1 \mathcal{A} + \alpha_0 \mathcal{E}$

$\Rightarrow (-\alpha_0)\mathcal{E} = (\mathcal{A}^{m-1} + \alpha_{m-1}\mathcal{A}^{m-2} + \cdots + \alpha_1 \mathcal{E}) \circ \mathcal{A}$

$\because \alpha_0 \neq 0 \quad \therefore (-\alpha_0 \mathcal{E})$ 可逆

于是 $\mathcal{A}$ 是单射. 因为 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\dim V = n < \infty$

所以 $\mathcal{A}$ 也是满射

即 $\mathcal{A}$ 可逆

取 $p=\mu_{\mathcal{A}}$ 得到 "$\Leftarrow$" 部分成立

反之，设 $\mathcal{A}$ 可逆，但

$$\mu_{\mathcal{A}}(t)=t^d+\beta_{d-1}t^{d-1}+\cdots+\beta_1 t,\quad \beta_i\in F$$

则
$$O=\mathcal{A}^d+\beta_{d-1}\mathcal{A}^{d-1}+\cdots+\beta_1\mathcal{A}$$
$$=(\mathcal{A}^{d-1}+\beta_{d-1}\mathcal{A}^{d-2}+\cdots+\beta_1\mathcal{E})\circ\mathcal{A}$$

$\because$ $\mathcal{A}$ 可逆

$\therefore$
$$O\circ\mathcal{A}^{-1}=(\mathcal{A}^{d-1}+\beta_{d-1}\mathcal{A}^{d-2}+\cdots+\beta_1\mathcal{E})\circ\mathcal{A}\circ\mathcal{A}^{-1}$$
$$=(\mathcal{A}^{d-1}+\beta_{d-1}\mathcal{A}^{d-2}+\cdots+\beta_1\mathcal{E})\circ\mathcal{E}$$

$$\Rightarrow\quad \mathcal{A}^{d-1}+\beta_{d-1}\mathcal{A}^{d-2}+\cdots+\beta_1\mathcal{E}=O$$

设 $g(t)=t^{d-1}+\beta_{d-1}t^{d-2}+\cdots+\beta_1$

则 $g(\mathcal{A})=O$，与 $\mu_{\mathcal{A}}(t)$ 的极小性矛盾.

例：核像分解第二定理

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 且 $\operatorname{rank}(\mathcal{A})<n:=\dim V$

则 $V=\ker(\mathcal{A})\oplus\operatorname{im}(\mathcal{A})$.

$\Leftrightarrow$ t 是 $\mu_{\mathcal{A}}(t)$ 的单因子.

注：本定理来自

袁力，沈洁：线性变换的像与核对空间的直和分解. 常州工学院学报，2卷第2期，2014，4月，37–39.

证："$\Rightarrow$" 设 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_d$ 是 $\ker(\mathcal{A})$ 的基

$\vec{e}_{d+1},\cdots,\vec{e}_n$ 是 $\operatorname{im}(\mathcal{A})$ 的基.

设 $\mathcal{A}_K=\mathcal{A}|_{\ker(\mathcal{A})}$，$\mathcal{A}_I=\mathcal{A}|_{\operatorname{im}(\mathcal{A})}$

$\because$ $\ker(\mathcal{A})$ 和 $\operatorname{im}(\mathcal{A})$ 都是 $\mathcal{A}$-子空间

（见讲义 11. page 5）

因 $\ker(\mathcal{A})\oplus\operatorname{im}(\mathcal{A})=V$ (*)

$\mu_A = \operatorname{lcm}(\mu_{A_K}, \mu_{A_I})$ [引理4.4]

$\because A_K = O \quad \therefore \mu_{A_K} = t$

设 $\vec{y} \in \operatorname{im}(A) \cancel{\cap \ker(A)}$. 使得

$A_I(\vec{y}) = \vec{0} \Rightarrow A(\vec{y}) = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{y} \in \ker(A)$

$\Rightarrow \vec{y} \in \operatorname{im}(A) \cap \ker(A)$

$\Rightarrow \vec{y} = \vec{0}$ (由(*))

$\Rightarrow$ A_I 是单射 从而 A_I 是双射

$\Rightarrow \mu_{A_I}(0) \neq 0$. [作业题]

$\Rightarrow \mu_A = t\,\mu_{A_I}$ 且 $t \nmid \mu_{A_I}$

$\Rightarrow$ t 是 μ_A 的单因子.

"$\Leftarrow$" 设 $\mu_A(t) = t\,p(t)$, 其中 $p \in F[t]$

且 $t \nmid p(t)$

于是 $\gcd(t, p(t)) = 1$

由核核分解定理.

$\ker(A) \oplus \ker(p(A)) = V$ $\cancel{(**)}$

下面证: $\operatorname{im}(A) = \ker(p(A))$.

设 $\vec{x} \in \operatorname{im}(A)$, 则

$\exists\, \vec{y} \in V$, 使得 $\vec{x} = A(\vec{y})$

$p(A)(\vec{x}) = p(A) \circ A(\vec{y}) = \mu_A(A)(\vec{y})$

$= O(\vec{y}) = 0$

($\because \mu_A(t) = p(t)\,t$)

于是 $\vec{x} \in \ker(p(A))$

$\Rightarrow \operatorname{im}(A) \subset \ker(p(A))$

$\because \dim(\operatorname{im}(A)) = \dim V - \dim(\ker(A))$

$\dim(\ker(p(A))) = \dim V - \dim(\ker(A))$

$\llcorner$ (**)

于是 $\dim[\mathrm{im}(\mathcal{A})] = \dim[\ker(\varphi(\mathcal{A}))]$

由此和 $\mathrm{im}(\mathcal{A}) \subset \ker(\varphi(\mathcal{A}))$ 可知

$$\mathrm{im}(\mathcal{A}) = \ker(\varphi(\mathcal{A}))$$

由(**)，得到

$$V=\ker(\mathcal{A}) \oplus \mathrm{im}(\mathcal{A}). \quad \square$$

例：设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 满足

$$\mathcal{A}^3 - \mathcal{A}^2 + \mathcal{A} = \mathcal{O}$$

证明：$V = \ker(\mathcal{A}) \oplus \mathrm{im}(\mathcal{A})$

证：设 $p(t) = t^3 - t^2 + t$. 则 $p(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$

情形1. $\mathcal{A}$ 可逆. 则结论显然成立

情形2. $\mathcal{A}$ 不可逆.

由作业. $t \mid \mu_{\mathcal{A}}(t)$

又因为 $p(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$

$$\mu_{\mathcal{A}}(t) \mid p(t) = (t^2 - t + 1)t$$

于是 t 必然是 $\mu_{\mathcal{A}}(t)$ 的单因子. 由

第二核像分解定理. $V = \ker(\mathcal{A}) \oplus \mathrm{im}(\mathcal{A})$ $\square$

§5 特征向量和特征值

问题：给定 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，求 $\mathcal{A}$ 的一维不变子空间

设 $\vec{u} \in V \setminus \{\vec{0}\}$，$U = \langle \vec{u} \rangle$. 则 $\dim U = 1$

如果 ~~$\mathcal{A}$~~ U 是 $\mathcal{A}$-不变的，则 $\exists \lambda \in F$. 使得

$$\mathcal{A}(\vec{u}) \in U \text{ 即 } \exists \lambda \in F. \text{ 使得}$$

$$\mathcal{A}(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$$

反之 设 $\exists \lambda \in F$. 使得 $\mathcal{A}(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$

设 $\vec{x} \in U$，则 $\exists \alpha \in F$，$\vec{x} = \alpha \vec{u}$

$$\mathcal{A}(\vec{x}) = \mathcal{A}(\alpha \vec{u}) = \alpha \mathcal{A}(\vec{u}) = \alpha \lambda \vec{u} \in U$$

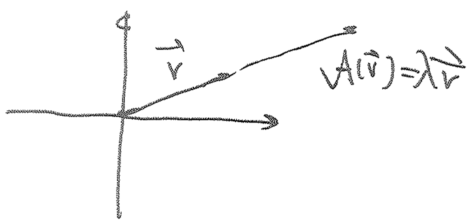
$\cancel{= \lambda(\alpha \vec{u})}$

$\Rightarrow U$ 是 $\mathcal{A}$-不变的.

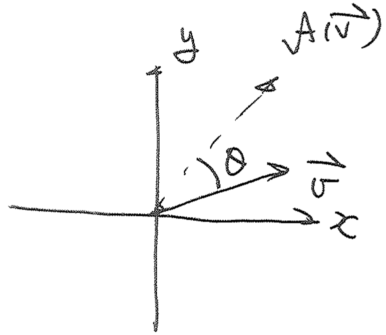
定义：设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\vec{v}\in V\setminus\{\vec{0}\}$.

如果 $\exists\lambda\in F$ 使得 $\mathcal{A}(\vec{v})=\lambda\vec{v}$

则称 $\vec{v}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征向量.(eigenvector)



有特征向量.



无特征向量

注：由上述推理可知.

$\langle\vec{v}\rangle$ 是 $\mathcal{A}$ 的一维不变子空间

$\Longleftrightarrow$ $\vec{v}$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量

§5.1 特征多项式与特征值

求特征向量的基本想法：

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 是 V 的基

A 是 $\mathcal{A}$ 在 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 下的矩阵

令 $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+\cdots+x_n\vec{e}_n$, $\lambda\in F$ 任意

$$\mathcal{A}(\vec{x})=\lambda\vec{x}\Longleftrightarrow$$

$$A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow (\lambda E-A)\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\quad(*)$$

于是 $\vec{x}$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量

$\Longleftrightarrow$ $\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ 是 $(*)$ 的非平凡解

而 $(*)$ 有非平凡解 $\Longleftrightarrow$ $|\lambda E-A|=0$

定义：设 $A\in M_n(F)$. t 是未定元

$|tE-A|\in F[t]$ 称为 A 的特征多项式

记为 $\chi_A(t)$

$\chi_A(t)$ 在 F 中的根称为 A 在 F 中的特征值

特征根 (eigenroot) 或特征值 (eigenvalue)

命题5.1. 设 $\chi_A(t)$ 是相似不变量

证：设，$A, B \in M_n(F)$, $A \sim_s B$

则 $\exists P \in GL_n(F)$. 使得 $A = P^{-1}BP$

$\chi_A(t) = |tE - A| = |tE - P^{-1}BP|$

$= |tP^{-1}EP - P^{-1}BP|$

$= |P^{-1}(tE - B)P|$

$= |P^{-1}|\,|tE - B|\,|P|$ [行列式乘积定理]

$= |tE - B| = \chi_B(t)$ ☒

~~定义：χ_A~~

定义：设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. A 是 $\mathcal{A}$ 在 V 的

某组基下的矩阵.

$\chi_A(t)$ 称为 ~~矩~~ $\mathcal{A}$ 的特征多项式

记为 $\chi_{\mathcal{A}}(t)$

$\chi_{\mathcal{A}}(t)$ 在 F 中的根称为 $\mathcal{A}$ 在 F 中的特征根(值).

$\chi_{\mathcal{A}}(t)$ 在中所有特征根的集合称为 $\mathcal{A}$ 在 F 中的谱. 记为 $\mathrm{spec}_F(\mathcal{A})$.

例：设 ~~$\mathcal{A} \in$~~ $\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的标准基，$\mathcal{A}(\vec{e_1}) = \vec{e_1} + \vec{e_2}$,

$\mathcal{A}(\vec{e_2}) = \vec{e_1} - \vec{e_2}$.

求 $\mathcal{A}$ 的特征向量

解 $(\mathcal{A}(\vec{e_1}), \mathcal{A}(\vec{e_2})) = (\vec{e_1}, \vec{e_2})\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A}$

$$\chi_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-1 & -1 \\ -1 & t+1 \end{vmatrix} = t^2 - 2$$

$$\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}) = \{ \underset{\lambda_1}{\sqrt{2}}, \underset{\lambda_2}{-\sqrt{2}} \}$$

$\lambda_1 \dashrightarrow$ $(\lambda_1 E - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & -1 \\ -1 & \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$ 是一个特征向量

$\lambda_2 \dashrightarrow$ $(\lambda_2 E - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

类似地 $\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$ 是一个特征向量

定义：设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，$\lambda \in \mathrm{spec}_F(\mathcal{A})$。

$\vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$，满足 $\mathcal{A}(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$

则称 $\vec{v}$ 是关于 λ 和 $\mathcal{A}$ 的特征向量。

设 $V^\lambda = \{\vec{v} \in V \mid \vec{v}$ 是 ~~A关~~ 关于 λ 和 $\mathcal{A}$ 的特征向量 或 $\vec{v} = \vec{0}\}$

称 V^λ 是 $\mathcal{A}$ 关于 λ 的特征子空间。

验证：V^λ 是 $\mathcal{A}$-子空间

$\because \mathcal{A}(\vec{0}) = \vec{0}$ $\therefore \mathcal{A}(\vec{0}) = \lambda\vec{0}$

于是 $\forall \vec{v} \in V^\lambda$，$\mathcal{A}(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$

设 $\alpha_1, \alpha_2 \in F$，$\vec{v_1}, \vec{v_2} \in F$

$\mathcal{A}(\alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2})$

$= \alpha_1 \mathcal{A}(\vec{v_1}) + \alpha_2 \mathcal{A}(\vec{v_2}))$

$= \alpha_1 \lambda \vec{v_1} + \alpha_2 \lambda \vec{v_2}$

$= \lambda(\alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2})$.

于是 $\alpha_1\vec{v_1}+\alpha_2\vec{v_2} \in V^{\lambda}$

$\forall\ \vec{v}\in V^{\lambda}$. $\quad \mathcal{A}(\vec{v})=\lambda\vec{v}\in V^{\lambda}$

$\Longrightarrow$ V^{λ} 是 $\mathcal{A}$-不变的

由此可知. $\mathcal{A}$ 的特征子空间都是 $\mathcal{A}$ 不变的.

注：在上例中. $\lambda_1=\sqrt{2}$, $\lambda_2=-\sqrt{2}$

$$V^{\lambda_1}=\left\langle \begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}-1\end{pmatrix}\right\rangle,\quad V^{\lambda_2}=\left\langle \begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{2}+1\end{pmatrix}\right\rangle$$

例 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$. 由

$\mathcal{A}(\vec{e_1})=\vec{e_1}$, $\mathcal{A}(\vec{e_2})=\vec{e_2}$, $\mathcal{A}(\vec{e_3})=\vec{e_2}+\vec{e_3}$

求 $\mathcal{A}$ 的所有特征子空间

解：

$$(\mathcal{A}(\vec{e_1}),\mathcal{A}(\vec{e_2}),\mathcal{A}(\vec{e_3}))=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}}_{A}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}=|tE-A|=\begin{vmatrix}t-1&0&0\\0&t-1&-1\\0&0&t-1\end{vmatrix}=(t-1)^3$$

$$\mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A})=\{\underset{\lambda}{1}\}$$

由
$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow\quad V^{\lambda}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle=\langle\vec{e_1},\vec{e_2}\rangle$$

例 $\mathcal{D}:\mathbb{R}_n[x]\longrightarrow\mathbb{R}_n[x]$

$$p(x)\longmapsto p'(x)$$

求 $\vec{e_1}=1$, $\vec{e_2}=x$, $\cdots$, $\vec{e_n}=x^{n-1}$

$\mathcal{D}$ 在 $\vec{e_1},\vec{e_2},\cdots,\vec{e_n}$ 下的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&2&\cdots&0&0\\ & & &\ddots& & \\0&0&0&\cdots&0&n-1\\0&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$$

$$\chi_D(t) = |tE - A| = t^n$$

$$\Rightarrow \operatorname{spec}_{\mathbb{R}}(D) = \{\underset{\lambda}{0}\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 解空间 $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow V^{\lambda} = \langle 1 \rangle = \mathbb{R}$.

~~§5.2 特征子空间的性质~~

命题 5.2 设 $n = \dim V$, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$

A 是 $\mathcal{A}$ 在 V 的一组基下的矩阵

则 (i) χ_A 是关于 t 的 n 次首一多项式

(ii) 设 $\chi_A(t) = t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0$

$\alpha_i \in F$

则 $\alpha_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$, $\alpha_0 = (-1)^n \det(A)$

证：设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$

$$\chi_A = \begin{vmatrix} t-a_{11} & -a_{12}, & \cdots, & -a_{1n} \\ -a_{21} & t-a_{22}, & \cdots, & -a_{2n} \\ & \cdots & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & t-a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= t^n - (a_{11} + \cdots + a_{nn}) t^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A|$$

其中 t^n 来自于对角线元素的乘积,

$(t-a_{11}) \cdots (t-a_{nn})$

t^{n-1} 的系数来自上述乘积中 t^{n-1} 的系数

而 ~~$(-1)^n A$~~ $\chi_A(0) = \begin{vmatrix} -a_{11}, & -a_{12}, & \cdots, & -a_{1n} \\ -a_{21}, & -a_{22}, & \cdots, & -a_{2n} \\ & \cdots & & \\ -a_{n1}, & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix}$

$= (-1)^n |A|$ □

注：t^i 的系数是

$(-1)^{n-i} \times [A$ 的所有 i 阶主子式之和$]$

§5.2 特征子空间的性质

定理5.1 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，$\lambda_1,\dots,\lambda_m\in\mathrm{spec}_F(\mathcal{A})$ 两两不同．则

$$V^{\lambda_1}+\cdots+V^{\lambda_m} \text{ 是直和}$$

证：对 m 归纳：

$m=1$ 显然成立

设 $m>1$ 且 $m-1$ 时定理成立

设 $\vec{v_1}\in V^{\lambda_1},\dots,\vec{v}_{m-1}\in V^{\lambda_{m-1}},\ \vec{v}_m\in V^{\lambda_m}$

满足

$$\vec{v_1}+\cdots+\vec{v}_{m-1}+\vec{v}_m=\vec{0}\quad\cdots①$$

~~则~~

对①两边作用 $\mathcal{A}$ 得

$$\lambda_1\vec{v_1}+\cdots+\lambda_{m-1}\vec{v}_{m-1}+\lambda_m\vec{v}_m=\vec{0}\quad\cdots②$$

$\lambda_m\times① - ②$

$$(\lambda_m-\lambda_1)\vec{v_1}+\cdots+(\lambda_m-\lambda_{m-1})\vec{v}_{m-1}=\vec{0}\quad -③$$

$\boxed{11页}$

因为 $\lambda_1,\dots\lambda_{m-1},\lambda_m$ 两两不同

所以 $\lambda_m-\lambda_i\neq0$, $i=1,2,\dots m-1$

由归纳假设和③

$(\lambda_m-\lambda_i)\vec{v_i}=\vec{0}\Rightarrow\vec{v_i}=0$, $i=1,2,\dots m-1$

$\Rightarrow\vec{v}_m=\vec{0}$

由~~第~~二章定理2.1．$V^{\lambda_1}+\cdots+V^{\lambda_{m-1}}+V^{\lambda_m}$ 是直和．

定义：设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，$\lambda\in\mathrm{spec}_F(\mathcal{A})$

λ 在 $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ 中的重数称为 λ 的代数重数

V^{λ} 的维数称为 λ 的几何维数．

定理52 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，$\lambda \in \mathrm{spec}_F(\mathcal{A})$

则 λ 的几何重数 $\leq$ λ 的代数重数

证：设 $d = \dim V^{\lambda}$，$\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_d$ 是 V^{λ} 的一组基 且 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_d, \vec{e}_{d+1}, \cdots, \vec{e}_n$ 是 V 的基.

由 $(\mathcal{A}(\vec{e}_1), \cdots \mathcal{A}(\vec{e}_d)) = (\lambda\vec{e}_1, \cdots \lambda\vec{e}_d)$

$$= (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_d) \begin{pmatrix} \lambda & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda \end{pmatrix}_{d\times d}$$

可知：$\mathcal{A}$ 在 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_d, \vec{e}_{d+1}, \cdots \vec{e}_n$ 下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} \lambda E_d & A_2 \\ O & A_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \chi_A(t) = |tE_n - A| = \begin{vmatrix} (t-\lambda)E_d & -A_2 \\ O & tE_{n-d} - A_3 \end{vmatrix}$$

$$= (t-\lambda)^d \, |tE_{n-d} - A_3|$$

$$= (t-\lambda)^d \, \chi_{A_3}(t)$$

则 $\chi_A(t)$ 中 λ 的根的重数 $\geq d$

即 λ 的代数重数 $\geq$ λ 的几何重数 ■

(关于重数的定义见上学期讲义17，page 2)

注：设 $A \in M_n(F)$，我们可以把 A 理解为线性算子

$$\mathcal{A}: F^n \longrightarrow F^n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

于是我们可以定义

$\mathrm{spec}_F(A)$，A 的特征向量

特征子空间等.

例：设 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\in M_4(\mathbb{Q})$

求 $\mathrm{spec}_{\mathbb{Q}}(A)$，$\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(A)$ 和 $\mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A)$

解：$\chi_A(t)=|tE-A|$

$$=\begin{vmatrix}t&-1&0&0\\0&t&-1&0\\0&0&t&-1\\0&0&1&t\end{vmatrix}=t^2(t^2+1)$$

$\mathrm{spec}_{\mathbb{Q}}(A)=\{0\}$，$\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(A)=\{0\}$.

$\mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A)=\{0, \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}\}$

§5.3 对角化

定义：设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 如果 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是对角的，则称 $\mathcal{A}$ 是可对角化的.

设 $A\in M_n(F)$. 如果 A 相似于某个对角阵，则称 A 是可对角化的

定理5.3. 设 $n=\dim V$ 且 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$

则下列断言等价

(i) $\mathcal{A}$ 可对角化

(ii) $\mathcal{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量

(iii) $V=\bigoplus\limits_{\lambda\in\mathrm{spec}_F(\mathcal{A})} V^{\lambda}$

证：(i) $\Rightarrow$ (ii)

设 $\mathcal{A}$ 在 V 的基底 $\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_n$ 下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1&&\\&\ddots&\\&&\alpha_n\end{pmatrix}$$

则 $(\mathcal{A}(\vec{\varepsilon}_1),\cdots,\mathcal{A}(\vec{\varepsilon}_n))=(\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n)\begin{pmatrix}\alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathcal{A}(\vec{\varepsilon}_i)=\alpha_i\vec{\varepsilon}_i,\ i=1,2,\cdots n$

$\Rightarrow \vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n$ 是 n 个线性变换的特征向量

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 设 $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_n$ 是 $\mathcal{A}$ 的 n 个线性变换的特征向量

设 $\vec{v}_{11},\cdots\vec{v}_{1d_1}$ 是关于特征值 λ_1 的特征向量

$\cdots\cdots$

$\vec{v}_{m,1},\cdots,\vec{v}_{m,d_m}$ 是关于特征值 λ_m 的特征向量

其中 $\{\vec{v}_{11},\cdots\vec{v}_{1d_1},\vec{v}_{m1},\cdots\vec{v}_{md_m}\}=\{\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_n\}$

且 $d_1+\cdots+d_m=n.$

设 $U_{\lambda_i}=\langle\vec{v}_{i,1},\cdots\vec{v}_{i,d_i}\rangle,\ i=1\cdots m$

则 $U_{\lambda_i}\subset V^{\lambda_i}$. $i=1,2,\cdots m$

于是：由定理5.1

$V^{\lambda_1}+\cdots+V^{\lambda_m}$ 是直和

于是 $U_{\lambda_1}+\cdots+U_{\lambda_m}$ 是直和

$$\begin{aligned}&\dim(U_{\lambda_1}+\cdots+U_{\lambda_m})\\&=\dim(U_{\lambda_1})+\cdots+\dim(U_{\lambda_m})\\&=d_1+\cdots+d_m\\&=n=\dim V\end{aligned}$$

$\Rightarrow U_{\lambda_1}+\cdots+U_{\lambda_m}=V$

$\because (V^{\lambda_1}+\cdots+V^{\lambda_m})\supset U_{\lambda_1}+\cdots+U_{\lambda_m}$

$\therefore V=V^{\lambda_1}+\cdots+V^{\lambda_m}.$

设 $\lambda \in \mathrm{spec}_F(\mathcal{A}) \setminus \{\lambda_1, \cdots \lambda_m\}$

则 $V^{\lambda_1} + \cdots + V^{\lambda_m} + V^{\lambda}$ 是直和

即 $V + V^{\lambda}$ 是直和

$\Rightarrow V^{\lambda} = \{\vec{0}\}$，$\lambda$ 不是特征值，矛盾.

(iii) $\Rightarrow$ (i) 设 $\mathrm{spec}_{\mathcal{A}}(F) = \{\lambda_1, \cdots \lambda_m\}$

$\cancel{V = \oplus}$

则 $V = V^{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V^{\lambda_m}$

设 $\vec{\xi}_{i1}, \cdots, \vec{\xi}_{i d_i}$ 是 V^{λ_i} 的基

$i = 1, 2, \cdots, m$

则 $\vec{\varepsilon}_{11}, \cdots \vec{\varepsilon}_{1 d_1}, \cdots \vec{\varepsilon}_{m,1}, \cdots \vec{\varepsilon}_{m, d_i}$

是 V 的基 因 $\mathcal{A}$ 在上述基下

的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} \underbrace{\lambda_1 \ddots \lambda_1}_{d_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \underbrace{\lambda_m \ddots \lambda_m}_{d_m} \end{pmatrix}$$

于是 $\mathcal{A}$ 可对角化. 因

例：在 §5.1 第一个例子中

$\dim V^{\lambda_1} = \dim V^{\lambda_2} = 1$ $V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2} = \mathbb{R}$

于是 $\mathcal{A}$ 可对角化

在第二个例子中

$\dim V^{\lambda} = 2 < \dim \mathbb{C}^3 = 3$.

$\mathcal{A}$ 不可对角化

定理5.4. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$.

则 $\mathcal{A}$ 可对角化

$\Leftrightarrow$ 下列两个条件同时成立

(i) $\chi_{\mathcal{A}}$ 在 $F[t]$ 中分解为线性因子之积,

(ii) $\forall \lambda \in \mathrm{spec}_F(\mathcal{A})$,

λ 的代数重数与几何重数相同

证: "$\Rightarrow$" 由 定理5.3 (iii) $\Rightarrow$ (i) 的证明可知 $\mathcal{A}$ 在某组基下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1\end{matrix}\right\} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \left.\begin{matrix}\lambda_m & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m\end{matrix}\right\} d_m \end{pmatrix}$$

其中 $\{\lambda_1 \dots \lambda_m\} = \mathrm{spec}_F(\mathcal{A})$

且 d_i 是 λ_i 的几何重数, $i=1,2,\dots m$ ⑯

于是 $\chi_{\mathcal{A}} = \chi_A = (t-\lambda_1)^{d_1} \cdots (t-\lambda_m)^{d_m}$

$\Rightarrow$ λ_i 的代数重数等于其几何重数. (i), (ii) 都成立.

"$\Leftarrow$" 设 $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t-\lambda_1)^{k_1} \cdots (t-\lambda_m)^{k_m}$

其中 $\lambda_1, \dots \lambda_m \in \mathrm{spec}_F(\mathcal{A})$, 两两不同

于是 λ_i 是代数重数 ~~设~~ 为 k_i

设 $n = \dim V$. 则由 ~~命~~ 题5.2

$\deg \chi_{\mathcal{A}}(t) = n$ 于是

$k_1 + \dots + k_m = n$

$\because$ λ_i 的几何重数也是 k_i

$\therefore$ $\dim V^{\lambda_i} = k_i$

定理5.1

$\Rightarrow$ $\dim(V^{\lambda_1} + \dots + V^{\lambda_m}) = \dim(V^{\lambda_1}) + \dots + \dim(V^{\lambda_m})$

$= k_1 + \dots + k_m = n.$ ($\Longrightarrow$) $V = V^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V^{\lambda_m}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ 可对角化 (定理5.3) ▨