关于算子可对角化的基本结论

设 $\dim_F V = n$，$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$

特征向量版 （定理5.3 (i) $\Leftrightarrow$ (ii)）

$\mathcal{A}$ 可对角化 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量

特征子空间版 （定理5.3 (i) $\Leftrightarrow$ (iii)）

$\mathcal{A}$ 可对角化 $\Leftrightarrow$ V 是特征子空间的直和

特征值版 （定理5.4）

$\mathcal{A}$ 可对角化 $\Leftrightarrow$ (i) $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ 在 F 上分解为一次因子之积

(ii) $\forall \lambda\in \mathrm{spec}_F(\mathcal{A})$，$\lambda$ 的几何重数 $=\lambda$ 的代数重数.

设 $\mathcal{A}$ 可对角化. $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n$ 是 $\mathcal{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量. 则 $\mathcal{A}(\vec{v}_i)=\alpha_i\vec{v}_i$，$i=1,2,\dots,n$

$\mathcal{A}$ 在 $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

~~其中~~ 其中 $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in \mathrm{spec}_F(\mathcal{A})$，不一定两两不同

例：设 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 由下列关系确定.

$$(\mathcal{A}(\vec{e}_1),\mathcal{A}(\vec{e}_2),\mathcal{A}(\vec{e}_3))=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A},$$

其中 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 是标准基.

问：$\mathcal{A}$ 是否可以对角化？如果是，求 V 的一组基使得 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵是对角的

解：直接计算得：$\chi_{\mathcal{A}}(t)=(t-4)(t-1)^2$

$\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(F)=\{\underset{\lambda_1}{4},\underset{\lambda_2}{1}\}$

$\dim(V^{\lambda_1})=1$ [$\because$ λ_1 的代数重数是 1]

$\dim(V^{\lambda_2})\le 2$ [$\because$ λ_2 - - - - - - 2]

求 V^{λ_1} 的一组基

$$(4E-A)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$V^{\lambda_1}=\langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{\vec{v}_1}\rangle$$

求 V^{λ_2} 的一组基

$$(E-A)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dim V^{\lambda_2}=2.\ \Rightarrow \mathbb{R}^3=V^{\lambda_1}\oplus V^{\lambda_2}\Rightarrow$ 可对角化

$$V^{\lambda_2}=\langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}_{\vec{v}_2},\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}}_{\vec{v}_3}\rangle$$

在 $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ 下 ②

$$(\mathcal{A}(\vec{v}_1),\mathcal{A}(\vec{v}_2),\mathcal{A}(\vec{v}_3))=(4\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$$

$$=(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)\underbrace{\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{B}$$

一般而言:

设 $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ 是 $\mathcal{A}$ 在 F 中的不同特征根

它们的几何重数分别是 $d_1,\ldots,d_m$

$\vec{v}_{11},\ldots\vec{v}_{1d_1}$ 是 V^{λ_1} 中线性无关的特征向量

. . . . . .

$\vec{v}_{m,1}\ldots\vec{v}_{m,d_m}$ 是 V^{λ_m} 中 . . .

由定理5.1 $V^{\lambda_1}+\cdots+V^{\lambda_m}$ 是直和

于是 $\vec{v}_{11},\ldots,\vec{v}_{1d_1},\ldots\vec{v}_{m,1},\ldots\vec{v}_{m,d_m}$

线性无关. ~~再设~~

$\vec{v}_{11},\ldots,\vec{v}_{1d_1},\ldots\vec{v}_{m,1},\ldots\vec{v}_{m,d_m},\vec{\varepsilon}_{d+1},\ldots\vec{\varepsilon}_n$

是 V 的基, 其中 $d=d_1+\cdots+d_m$

则 $\mathcal{A}$ 在上述基底下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 E_{d_1} & & & \\ & \ddots & & \boxed{\begin{matrix}\text{无}\\ \text{法}\\ \text{确}\\ \text{定}\end{matrix}} \\ & & \lambda_m E_{d_m} & \\ & & & \end{pmatrix}_{n\times n}$$

而当 $d=m$ 时，矩阵是

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 E_{d_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_m E_{m} \end{pmatrix}$$

此时 $\chi_{\mathcal{A}}(t)=(t-\lambda_1)^{d_1}\cdots(t-\lambda_m)^{d_m}$

λ_i 的代数重数也是 d_i, $i=1,\dots,m$.

例：设 $\mathcal{D}$: $\mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$

$p(x) \longmapsto p'(x)$

令 ~~$\vec{e}_1=x,\ \vec{e}_2=x^2$~~ $e_1=1,\ e_2=x,\ \dots,\ e_n=x^{n-1}$ ③

$\mathcal{D}$ 在上述基下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

$\chi_{\mathcal{D}}(t)=t^n$. $\mathrm{spec}_F(\mathcal{D})=\{\underset{\lambda}{0}\}$

$V^{\lambda}=\langle \vec{e}_1\rangle=\langle 1\rangle \Rightarrow \mathcal{A}$ 不可对角化

$$A=\begin{pmatrix} 0\cdot E_1 & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & & 0 & n-1 \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{matrix}} \\ & \end{pmatrix}$$

~~推论~~

定义：设 $A\in M_n(F)$. 如果 A 相似于一个对角矩阵，则称 A 是可对角化的

定理5.5（关于可对角化的矩阵版）

设 $A\in M_n(F)$，则下列断言等价

(i) A 可对角化

(ii) A 有 n 个线性无关的特征向量

(iii) A 的特征子空间之和是 F^n

(iv) $\chi_A(t)$ 在 F 中分解为一次因式之积

且 $\forall \lambda\in \mathrm{spec}_F(A)$，

λ 的几何重数与代数重数相同。

证：设 $\mathcal{A}: F^n \to F^n$

$$\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \mapsto A\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$$

则 $\mathcal{A}$ 可对角化 $\Longleftrightarrow$ A 可对角化

再利用定理5.3和5.4即可。

注：设 $A\in M_n(F)$ 可对角化

$\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_n$ 是 A 的 n 个线性无关向量。令 $P=(\vec{v}_1,\cdots \vec{v}_n)$

则 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵

验证：因为在基 $\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_n$ 下 $\mathcal{A}$ 的矩阵是对角阵。所以，由线性映射在基变换下的矩阵关系可知

$P^{-1}AP$ 是对角阵（见本章定理2.1）

我们也可以直接验证如下。

设 $A\vec{v}_i=\lambda_i\vec{v}_i$，$i=1,2,\ldots n$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1}A(\vec{v}_1,\cdots \vec{v}_n) \\ &= P^{-1}(A\vec{v}_1,\cdots A\vec{v}_n) \\ &= P^{-1}(\lambda_1\vec{v}_1,\cdots \lambda_n\vec{v}_n) \\ &= P^{-1}\underbrace{(\vec{v}_1,\cdots \vec{v}_n)}_{P}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\lambda_1 & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

推论5.1 设 $\mathcal{A}\in \mathcal{L}(V)$，$A\in M_n(F)$

(i) 如果 $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ 的根都在 F 中且无重根，

则 $\mathcal{A}$ 可对角化

(ii) 同样的结论适合矩阵 A

证：此时代数重数是1也为几何重数

例 设 $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$，计算 A^m

$\chi_A(t)=|tE-A|=t^2-t-1$

$\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

都不是重根，于是 A 可对角化

$(\lambda_1E-A)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow V^{\lambda_1}=\langle\underbrace{\begin{pmatrix}1\\\lambda_1\end{pmatrix}}_{v_1}\rangle$

$\Updownarrow$

~~同解~~ $\begin{pmatrix}\lambda_1, & -1\\ -1, & \lambda_1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

同理 $V^{\lambda_2}=\langle\begin{pmatrix}1\\\lambda_2\end{pmatrix}\rangle$

设 $P=\begin{pmatrix}1&1\\\lambda_1&\lambda_2\end{pmatrix}$

则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\ A=P\cancel{A}\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}P^{-1}$

$A^m=P\begin{pmatrix}\lambda_1^m&\\0&\lambda_2^m\end{pmatrix}P$

计算 P^{-1}

$\cancel{P^{-1}}$ $\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\\lambda_1&\lambda_2&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\0&\lambda_2-\lambda_1&-\lambda_1&1\end{array}\right)$

$\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\0&1&\frac{-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}&\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\end{array}\right)$

$\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}&\frac{-1}{\lambda_2-\lambda_1}\\0&1&\frac{-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}&\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\end{array}\right)$

$P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}&\frac{-1}{\lambda_2-\lambda_1}\\\frac{-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}&\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\end{pmatrix}$

设 $f_0=0,\ f_1=1,\ f_2=1,\ f_m=f_{m-1}+f_{m-2}\ (m>2)$

$A=\begin{pmatrix}f_0&f_1\\f_1&f_2\end{pmatrix}$

故 $A^m=\begin{pmatrix}f_{m-1}&f_m\\f_m&f_{m+1}\end{pmatrix}$

断言的证明

$$A^m = A^{m-1}A = \begin{pmatrix} f_{m-2} & f_{m-1} \\ f_{m-1} & f_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_{m-1} & f_{m-2}+f_{m-1} \\ f_m & f_{m-1}+f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{m-1} & f_m \\ f_m & f_{m+1} \end{pmatrix}$$

断言成立.

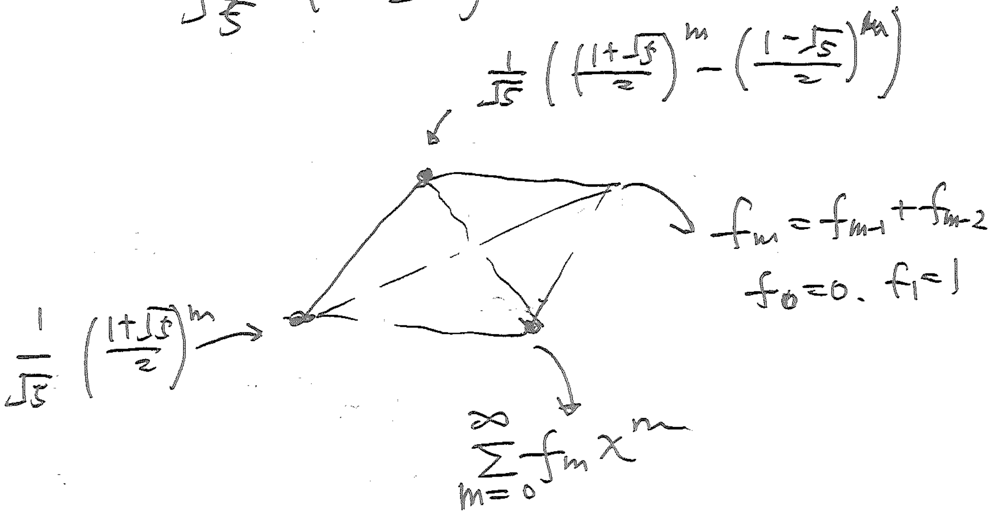
$\Rightarrow$ f_m 由

$$A^m = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 \\ 0 & \lambda_2^m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}, & \frac{-1}{\lambda_2-\lambda_1} \\ \frac{-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}, & \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1^m & \lambda_2^m \\ \lambda_1^{m+1} & \lambda_2^{m+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} & \frac{-1}{\lambda_2-\lambda_1} \\ \frac{-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}, & \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \end{pmatrix}$$

得出 $$f_m = \frac{-\lambda_1^m}{\lambda_2-\lambda_1} + \frac{\lambda_2^m}{\lambda_2-\lambda_1} = \frac{\lambda_2^m - \lambda_1^m}{\lambda_2-\lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m\right)$$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m \quad (m \to \infty)$$



Concrete Tetrahedron

Continuous　　discrete

例：设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$

证明：$\exists\, c \in F$ 使得 $\mathcal{A} = c\mathcal{E} \Leftrightarrow V$ 中的每个非零向量都是特征向量

证：$\Rightarrow$ 设 $\vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$

$\mathcal{A}(\vec{v}) = c\mathcal{E}(\vec{v}) = c\vec{v} \Rightarrow \vec{v}$ 是特征向量

$\Leftarrow$ 设 $\vec{u}, \vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$，线性无关

$\mathcal{A}(\vec{u}) = \alpha\vec{u}$，$\mathcal{A}(\vec{v}) = \beta\vec{v}$，$\alpha, \beta \in F$

~~假设 $\alpha \neq \beta$~~

$\mathcal{A}(\vec{u}+\vec{v}) = \mathcal{A}(\vec{u}) + \mathcal{A}(\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

另一方面 $\exists\ \lambda \in F$

$\mathcal{A}(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda(\vec{u}+\vec{v})$

$\Rightarrow \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

$\Rightarrow (\lambda-\alpha)\vec{u} + (\lambda-\beta)\vec{v} = \vec{0}$

~~若有~~ $\Rightarrow \lambda = \alpha$ 且 $\lambda = \beta$

设 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 是 V 的一组基

则 $\exists\ c \in F$

使得 $\mathcal{A}(\vec{e}_i) = c\vec{e}_i$，$i = 1, 2 \cdots n$

于是 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵是 cE

$\Rightarrow \mathcal{A} = c\mathcal{E}$ $\square$

§6 商算子

引理 6.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，$U$ 是 $\mathcal{A}$-子空间

定义：$\bar{\mathcal{A}}: V/U \to V/U$

$\vec{v} + U \mapsto \mathcal{A}(\vec{v}) + U$

则 $\bar{\mathcal{A}} \in \mathcal{L}(V/U)$.

证：验证 $\bar{\mathcal{A}}$ 是良定义的

设 $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ 满足 $\vec{v}_1 + U = \vec{v}_2 + U$

即 $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \in U$

则 $\mathcal{A}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \in U$ [U 是 $\mathcal{A}$-不变]

$\Rightarrow \mathcal{A}(\vec{v}_1) - \mathcal{A}(\vec{v}_2) \in U$

$\Rightarrow \mathcal{A}(\vec{v}_1) + U = \mathcal{A}(\vec{v}_2) + U$

$\Rightarrow \bar{\mathcal{A}}(\vec{v}_1 + U) = \bar{\mathcal{A}}(\vec{v}_2 + U)$

$\bar{\mathcal{A}}$ 是良定义的.

再验证 $\overline{\mathcal{A}}$ 是线性的

$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F$, $\vec{v}_1+U$, $\vec{v}_2+U \in V/U$

$$\overline{\mathcal{A}}\left(\alpha_1(\vec{v}_1+U)+\alpha_2(\vec{v}_2+U)\right)$$

$$=\overline{\mathcal{A}}\left((\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2)+U\right) \quad [\text{商空间定义}]$$

$$=\overline{\mathcal{A}}(\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2)+U \quad [\overline{\mathcal{A}}\text{的定义}]$$

$$=[\alpha_1\mathcal{A}(\vec{v}_1)+\alpha_2\mathcal{A}(\vec{v}_2)]+U \quad [\mathcal{A}\text{线性}]$$

$$=\alpha_1(\mathcal{A}(\vec{v}_1)+U)+\alpha_2(\mathcal{A}(\vec{v}_2)+U) \quad [\text{商空间定义}]$$

$$=\alpha_1\overline{\mathcal{A}}(\vec{v}_1+U)+\alpha_2\overline{\mathcal{A}}(\vec{v}_2+U).$$ 图

称 $\overline{\mathcal{A}}$ 是关于 $\mathcal{A}$ 和 U 的商算子

定理6.1 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, U 是 $\mathcal{A}$-子空间 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_d$ 是 U 的一组基. $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_d,\vec{e}_{d+1},\cdots,\vec{e}_n$ 是 V 的基

设 $\mathcal{A}|_U$ 在 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_d$ 下的矩阵是 A_U

$\overline{\mathcal{A}}$ 在 $\vec{e}_{d+1}+U,\cdots,\vec{e}_n+U$ 生的矩阵是 B. 则

$\mathcal{A}$ 在 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_d,\vec{e}_{d+1},\cdots,\vec{e}_n$ 下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix} A_U & C \\ O & B \end{pmatrix}, \text{其中 } C\in F^{d\times(n-d)}.$$

$\boxed{\text{注: } \vec{e}_{d+1}+U,\cdots,\vec{e}_n+U \text{ 是 } V/U \text{ 的基的证明见: 第一章定理7.3}}$

定理6.1 的证明

$$(\mathcal{A}(\vec{e}_1),\cdots\mathcal{A}(\vec{e}_d))=(\mathcal{A}|_U(\vec{e}_1),\cdots\mathcal{A}|_U(\vec{e}_d))$$

$$=(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_d)A_U \quad (*)$$

$$(\overline{\mathcal{A}}(\vec{e}_{d+1}+U),\cdots\overline{\mathcal{A}}(\vec{e}_n+U))$$

$$=(\vec{e}_{d+1}+U,\cdots,\vec{e}_n+U)B \quad [B\text{的定义}] \quad (**)$$

由命题3.1, $\mathcal{A}$ 在 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_d,\vec{e}_{d+1},\dots,\vec{e}_n$ 下的矩阵是 $A=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ O & A_3\end{pmatrix}$

~~其中A~~ 其中 $A_1\in M_d(F)$, $A_2\in F^{d\times(n-d)}$, $A_3\in M_{n-d}(F)$

下面证: $A_1=A_U$, $A_3=B$

由(*)可知 $A_1=A_U$

$\forall j\in\{d+1,\dots,n\}$

$$\mathcal{A}(\vec{e}_j)=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_d,\vec{e}_{d+1},\dots\vec{e}_n)\vec{A}^{(j)}$$

$$=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_d,\vec{e}_{d+1},\dots\vec{e}_n)\begin{pmatrix}\vec{A}_2^{(j-d)}\\ \vec{A}_3^{(j-d)}\end{pmatrix}$$

$$=\underbrace{(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_d)\vec{A}_2^{(j-d)}}_{\in U}+(\vec{e}_{d+1},\dots,\vec{e}_n)\vec{A}_3^{(j-d)} \quad (***)$$

$\bar{\mathcal{A}}(\vec{e}_j+U)=\mathcal{A}(\vec{e}_j)+U$ [$\bar{\mathcal{A}}$的定义]

$=(\vec{e}_{d+1},\dots,\vec{e}_n)\vec{A}_3^{(d-j)}+U$ [(***)]

$=(\vec{e}_{d+1}+U,\dots,\vec{e}_n+U)\vec{A}_3^{(d-j)}$ [V/U的定义]

由(*) $\cancel{\vec{B}^{(d+j)}}$ $\vec{B}^{(d-j)}=\vec{A}_3^{(d-j)}\Rightarrow B=A_3$ ☐

~~推论6.1 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, U是$\mathcal{A}$的不变子空间~~

~~设 $\{0\}\subsetneq U\subsetneq V$~~

~~则 $\chi_{\mathcal{A}}(t)=\chi_{\mathcal{A}_U}(t)\,\chi_{\bar{\mathcal{A}}}(t)$.~~

~~证: 由上述定理: $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是 $\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ O & A_3\end{pmatrix}$~~

~~其中 A_1是$\mathcal{A}|_U$的矩阵(在$M_d(F)$中) A_3是$\bar{\mathcal{A}}$的矩阵(在$M_{n-d}(F)$中)~~

回忆: 定理6.1

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. U是$\mathcal{A}$-不变子空间

设 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_d$ 是U的一组基,

~~e_{d+1}~~ $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_d,\vec{e}_{d+1},\dots,\vec{e}_n$

是V的一组基.

设 A_U 是 $\mathcal{A}_U$ 在 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_d$ 下的矩阵. B是 $\bar{\mathcal{A}}$ 在 $\vec{e}_{d+1}+U,\dots,\vec{e}_n+U$ 下的基. 则 $\mathcal{A}$ 在

$\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_d,\vec{e}_{d+1},\dots,\vec{e}_n$

下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}A_U & C\\ O & B\end{pmatrix},$$ 其中 $C\in F^{d\times(n-d)}$

(席南华, 基础代数 p67. 第段

"显然, A_2 是 $\bar{\mathcal{A}}$ 在基 $(\bar{e})$ 下的矩阵"

推论6.1 设V是$\mathbb{C}$上n维线性空间 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 则 $\mathcal{A}$ 在V的某组基下的矩阵是上三角形. 即

$$A=\begin{pmatrix}\ddots & * \\ O & \ddots\end{pmatrix}_{n\times n}\in M_n(\mathbb{C})$$

证: 对n归纳.

$n=1$. 显然. 考虑 $\dim V=n>1$

设$n-1$时定理成立.

因为 $\chi_{\mathcal{A}}(t)\in\mathbb{C}[t]$ 且次数大于零

所以 $\exists\lambda\in\mathbb{C}$, 使得 $\lambda\in\mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A})$

(代数学基本定理)

设 $\vec{\varepsilon}_1$ 是λ对应的特征向量.

令 $U=\langle\vec{\varepsilon}_1\rangle$. 则

$$\mathcal{A}_U: U\longrightarrow U,\quad \alpha\vec{\varepsilon}_1\longmapsto\lambda(\alpha\vec{\varepsilon}_1)$$

U是$\mathcal{A}$-子空间.

~~设 $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \dots, \vec{\varepsilon}_n$ 是 V 的一组基~~

因为 $\dim V/\langle\vec{\varepsilon}_1\rangle = n-1$ 且 $\bar{\mathcal{A}} \in \mathcal{L}(V/\langle\vec{\varepsilon}_1\rangle)$

是商映射. 所以 $\exists$ $V/\langle\vec{\varepsilon}_1\rangle$ 中一组基

$$\vec{\varepsilon}_2 + \langle\vec{\varepsilon}_1\rangle, \dots, \vec{\varepsilon}_n + \langle\vec{\varepsilon}_1\rangle$$

使得 $\bar{\mathcal{A}}$ 在该基下的矩阵 $B \in M_{n-1}(F)$

是上三角形. 即

$$B = \begin{pmatrix} \diagdown & * \\ O & \diagdown \end{pmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

由定理 6.1 $\mathcal{A}$ 在基底

$$\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \dots, \vec{\varepsilon}_n$$

下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha_2 \cdots \alpha_n \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha_2 \cdots \alpha_n \\ O & \diagdown \end{pmatrix}$$

$\square$

注: 推论6.1 是习南华书 p69.

定理2.47. 证明类似. 也是

该定理也可由柯斯特理金 p66

定理9 直接证明.

注 矩阵版

推论6.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, U 是 $\mathcal{A}$-不变子空间 且 $0 < \dim U < \dim V$.

则 $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}_U}(t)\, \chi_{\bar{\mathcal{A}}}(t)$,

其中 $\bar{\mathcal{A}}$ 是 $\mathcal{A}$ 关于 U 的商算子

证: 设 $d = \dim U$. 由定理 6.1

$\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵

是 $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{pmatrix}$

其中 $A_1 \in M_d(F)$ 是 $\mathcal{A}_U$ 的矩阵

$A_3 \in M_{n-d}(F)$ 是 $\bar{\mathcal{A}}$ 的矩阵

$$\chi_{\mathcal{A}}(t)=|tE_n-A|=\left|\begin{pmatrix} tE_d & O \\ O & tE_{n-d}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3\end{pmatrix}\right|$$

$$=\begin{vmatrix} tE_d-A_1 & -A_2 \\ O & tE_{n-d}-A_3\end{vmatrix}$$

$$=|tE_d-A_1|\,|tE_{n-d}-A_3|$$ [~~上学期讲义~~ 12，定理2.2]

$$=\chi_{\mathcal{A}_U}(t)\ \chi_{\overline{\mathcal{A}}}(t)$$ ▨

例：设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，$U$ 是 $\mathcal{A}$-子空间

$\overline{\mathcal{A}}$ 是 $\mathcal{A}$ 关于 U 的商算子.

设 $p\in F[t]$，$\vec{v}\in V$

则 $p(\mathcal{A})(\vec{v})+U=p(\overline{\mathcal{A}})(\vec{v}+U)$

证：

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "p(\mathcal{A})"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & V \arrow[d] \\ V/U \arrow[r, "p(\overline{\mathcal{A}})"] & V/U \end{tikzcd}$$

设 $p(t)=\alpha_m t^m+\cdots+\alpha_1 t+\alpha_0$，其中 $\alpha_m,\cdots,\alpha_1,\alpha_0\in F$

$$p(\mathcal{A})(\vec{v})=\left(\alpha_m\mathcal{A}^m+\cdots+\alpha_1\mathcal{A}+\alpha_0\mathcal{E}\right)(\vec{v})$$

$$=\alpha_m\mathcal{A}^m(\vec{v})+\cdots+\alpha_1\mathcal{A}(\vec{v})+\alpha_0\mathcal{E}(\vec{v})$$

$$p(\mathcal{A})(\vec{v})+U=\left(\alpha_m\mathcal{A}^m(\vec{v})+\cdots+\alpha_1\mathcal{A}(\vec{v})+\alpha_0\vec{v}\right)+U$$

$$=\alpha_m\left(\mathcal{A}^m(\vec{v})+U\right)+\cdots+\alpha_1\left(\mathcal{A}(\vec{v})+U\right)+\alpha_0(\vec{v}+U)$$

$$=\alpha_m\left(\overline{\mathcal{A}}^m(\vec{v}+U)\right)+\cdots+\alpha_1\left(\overline{\mathcal{A}}(\vec{v}+U)\right)+\alpha_0\overline{\mathcal{E}}(\vec{v}+U)$$

其中 $\overline{\mathcal{E}}$ 是 V/U 上的恒同映射

$$=p(\overline{\mathcal{A}})(\vec{v}+U)$$ ▨

§7 循环子空间

定义：设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，$\vec{v}\in V$．由

$\vec{v},\mathcal{A}(\vec{v}),\cdots,\mathcal{A}^k(\vec{v}),\cdots\cdots$

生成的子空间．称为由 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$ 生成的循环子空间．记为 $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$

命题7.1．设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，$\vec{v}\in V$

(i) $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}=\{p(\mathcal{A})(\vec{v})\mid p\in F[t]\}$

(ii) $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$ 是 $\mathcal{A}$-不变的

(iii) 设 $\vec{v}\neq\vec{0}$．则 $d=\dim(F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v})\Leftrightarrow\vec{v},\mathcal{A}(\vec{v}),\cdots\mathcal{A}^{d-1}(\vec{v})$ 是 $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$ 的一组基．

证：(i) 设 $p(t)=\alpha_m t^m+\alpha_{m-1}t^{m-1}+\cdots+\alpha_0$，其中 $\alpha_i\in F$

$p(\mathcal{A})(\vec{v})=(\alpha_m\mathcal{A}^m+\alpha_{m-1}\mathcal{A}^{m-1}+\cdots+\alpha_0\mathcal{E})(\vec{v})$

$=\alpha_m\mathcal{A}^m(\vec{v})+\alpha_{m-1}\mathcal{A}^{m-1}(\vec{v})+\cdots+\alpha_0\vec{v}$

$\in F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$．

于是 $\{p(\mathcal{A})(\vec{v})\mid p\in F[t]\}\subset F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$

反之设 $\vec{w}\in F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$

则 $\exists\ i_1,\cdots,i_k\in\mathbb{N}$．$\beta_1,\cdots\beta_k\in F$

使得 $\vec{w}=\beta_1\mathcal{A}^{i_1}(\vec{v})+\cdots+\beta_k\mathcal{A}^{i_k}(\vec{v})$

设 $p(t)=\beta_1t^{i_1}+\cdots+\beta_kt^{i_k}$．

则 $\vec{w}=p(\mathcal{A})(\vec{v})$

$\Rightarrow F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}\subset\{p(\mathcal{A})(\vec{v})\mid p\in F[t]\}$

(ii) 设 $\vec{x}\in F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$．由(i)，$\exists p\in F[t]$ 使得 $\vec{x}=p(\mathcal{A})(\vec{v})$

$\mathcal{A}(\vec{x})=\mathcal{A}(p(\mathcal{A})(\vec{v}))=\mathcal{A}\circ p(\mathcal{A})(\vec{v})$

$=q(\mathcal{A})(\vec{v})$，其中 $q=t\,p(t)$

由(i) $\mathcal{A}(\vec{x})\in F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$

(iii) $\Leftarrow$ 显然

$\Rightarrow$ ∵ $\dim(F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v})=d<\infty$

∴ $\exists\ k\in\mathbb{Z}^+$

使得 $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \dots \mathcal{A}^{k-1}(\vec{v})$ 线性无关

但 $\mathcal{A}^k(\vec{v}) \in \langle \vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \dots, \mathcal{A}^{k-1}(\vec{v}) \rangle$

不妨设 $\mathcal{A}^k(\vec{v}) = \alpha_0 \vec{v} + \alpha_1 \mathcal{A}(\vec{v}) + \dots + \alpha_{k-1} \mathcal{A}^{k-1}(\vec{v})$,

其中 $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_{k-1} \in F$.

令 $p(t) = t^k - \alpha_{k-1} t^{k-1} - \dots - \alpha_1 t - \alpha_0$

则 $p(\mathcal{A})(\vec{v}) = \vec{0}$

设 $\vec{z} = F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$. 由 (i), $\exists f \in F[t]$

使得 $\vec{z} = f(\mathcal{A})(\vec{v})$

由多项式除法

$$f(t) = g(t)p(t) + r(t)$$

其中 $g, r \in F[t]$, 且 $r(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_{k-1} t^{k-1}$,

$\beta_0, \dots \beta_{k-1} \in F$

于是 $f(\mathcal{A}) = g(\mathcal{A})p(\mathcal{A}) + r(\mathcal{A})$

$\Rightarrow f(\mathcal{A})(\vec{v}) = g(\mathcal{A}) \circ p(\mathcal{A})(\vec{v}) + r(\mathcal{A})(\vec{v})$

$\Rightarrow \vec{z} = r(\mathcal{A})(\vec{v}) = \beta_0 \vec{v} + \beta_1 \mathcal{A}(\vec{v}) + \dots$ ~~+[illegible]~~
$+ \dots + \beta_{k-1} \mathcal{A}^{k-1}(\vec{v})$.

$\Rightarrow \vec{z} \in \langle \vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \dots \mathcal{A}^{k-1}(\vec{v}) \rangle$

即 $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \dots \mathcal{A}^{k-1}(\vec{v})$ 是 $F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$ 的一组基. 从而 ~~[illegible]~~ 有 $d = k$ ▨

例: 设 $\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

设 $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 求 $\dim(F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v})$ 和 $\dim(F[\mathcal{A}] \cdot \vec{w})$ 的维数

$\mathcal{A}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v})$ 线性无关 $\Rightarrow \dim(F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v})$ 的维数是 2

$\mathcal{A}^2(\vec{w}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\dim(F[\mathcal{A}] \cdot \vec{w}) = 1$.

定义：设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，$\vec{v}\in V$，$p\in F[t]$

(i) 如果 $p(\mathcal{A})(\vec{v})=\vec{0}$，则称 p 是关于 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$ 的零化多项式

(ii) 在关于 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$ 的所有零化多项式中，非零，首一且次数最低的称为关于 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$ 的极小多项式，记为 $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}$.

命题7.2. 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，$\vec{v}\in V\setminus\{\vec{0}\}$

(i) $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}$ 存在且唯一

(ii) 若 $p\in F[t]$ 是关于 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$ 的零化多项式，则 $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}(t)\mid p(t)$

(iii) $\dim(F[\mathcal{A}]\vec{v})=\deg\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}$

证：(i) $\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})=0$

于是 $\mu_{\mathcal{A}}$ 是关 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$ 的零化多项式. 由此可知 $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}$ 存在. 设 p 是另一个非零，首一且次数最低 ⑬

⑭

⑮

使得 $p(\mathcal{A})(\vec{v})=\vec{0}$ 的多项式. 则

$$\deg\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}=\deg p=:d$$

$\Rightarrow q=\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}-p$ 的次数 $<d$

$$q(\mathcal{A})=\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}(\mathcal{A})-p(\mathcal{A})$$

$$q(\mathcal{A})(\vec{v})=\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}(\mathcal{A})(\vec{v})-p(\mathcal{A})(\vec{v})=\vec{0}$$

$\Rightarrow q=0$ [∵ d 次数最低，[illegible]]

$\Rightarrow \mu_{\mathcal{A},\vec{v}}=p$.

(ii) 设 $f\in F[t]$，$f(\mathcal{A})(\vec{v})=\vec{0}$

由多项式除法

$$f(t)=q(t)\,\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}(t)+r(t)$$

其中 $\deg(r)<d$

$$f(\mathcal{A})=q(\mathcal{A})\,\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}(\mathcal{A})+r(\mathcal{A})$$

$$f(\mathcal{A})(\vec{v})=q(\mathcal{A})\,\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}(\mathcal{A})(\vec{v})+r(\mathcal{A})(\vec{v})$$

$\Rightarrow r(\mathcal{A})(\vec{v})=\vec{0}\Rightarrow r(t)=0$.

(iii) 由命题7.1 (i)

$$\vec{v},\ \mathcal{A}(\vec{v}),\ \dots,\ \mathcal{A}^{d-1}(\vec{v})$$

是 $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$ 的一组基，且 $\exists\ \alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{d-1}\in F$

使得

$$\mathcal{A}^{d}(\vec{v})=\alpha_{d-1}\mathcal{A}^{d-1}(\vec{v})+\dots+\alpha_1\mathcal{A}(\vec{v})+\alpha_0\vec{v}$$

设 $p(t)=t^d-\alpha_{d-1}t^{d-1}-\dots-\alpha_0$

则 $p(\mathcal{A})=0$.

由(ii) $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}\mid p$. 但

$\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}$ 的次数不可能小于 d

否则 $\vec{v},\mathcal{A}(\vec{v}),\dots,\mathcal{A}^{d-1}(\vec{v})$ 线性相关.

$$\Rightarrow \dim\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}=d \quad \boxtimes$$

引理7.1 设

$$p(t)=t^n+\alpha_{n-1}t^{n-1}+\dots+\alpha_1 t+\alpha_0$$

则 $p(t)=|tE-A|$，其中 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & -\alpha_0\\ 1 & 0 & \cdots & -\alpha_1\\ 0 & 1 & \cdots & -\alpha_2\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & & 0 & -\alpha_{n-2}\\ 0 & & 1 & -\alpha_{n-1}\end{pmatrix}$

证: $|tE-A|$

$$=\begin{vmatrix} t & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_0\\ -1 & t & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1\\ 0 & -1 & t & \cdots & 0 & \alpha_2\\ \vdots & & & \ddots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t & \alpha_{n-2}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & t+\alpha_{n-1}\end{vmatrix}$$

对 n 归纳

$n=1$ 时 $|tE-A|=t+\alpha_0=p(t)$

设 $n-1$ 时结论成立

当 n 时

$$|tE-A|=t\begin{vmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1\\ -1 & t & \cdots & 0 & \alpha_2\\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & t & \alpha_{n-2}\\ 0 & 0 & \cdots & -1 & t+\alpha_{n-1}\end{vmatrix}+\alpha_0(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & t & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & t & \cdots & 0\\ & & \cdots & & t\\ & & \cdots & & -1\end{vmatrix}$$

$$=t(t^{n-1}+\alpha_{n-1}t^{n-2}+\dots+\alpha_1)+\alpha_0$$

$$=t^n+\alpha_{n-1}t^{n-1}+\dots+t+\alpha_0 \quad \boxtimes$$

定义：设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，$\vec{v} \in V$。

如果 $V = F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$，则称 V 是 $\mathcal{A}$-循环空间，$\vec{v}$ 称为 V 的循环向量。

定理 7.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，$V$ 是 $\mathcal{A}$-循环空间，则 $\mu_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}}(t)$。

证：设 $V = F[\mathcal{A}]\vec{v}$。

则 $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \cdots, \mathcal{A}^{n-1}(\vec{v})$ 是 V 的一组基。（命题 7.1 (i)）

设 $\mathcal{A}^n(\vec{v}) = -\alpha_0\vec{v} - \alpha_1\mathcal{A}(\vec{v}) - \cdots - \alpha_{n-1}\mathcal{A}^{n-1}(\vec{v})$

设 $\alpha_i \in F$

设 $p(t) = t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \cdots + \alpha_0$

则 $p(\mathcal{A})(\vec{v}) = \vec{0}$

$\forall \vec{x} \in V$，$\exists g \in F[t]$ 使得 $\vec{x} = g(\mathcal{A})(\vec{v})$（命题 7.1 (ii)）

于是：

$p(\mathcal{A})(\vec{x}) = p(\mathcal{A})g(\mathcal{A})(\vec{v}) = g(\mathcal{A})p(\mathcal{A})(\vec{v}) = \vec{0}$

由此可知：

$p(\mathcal{A}) = 0 \Rightarrow \mu_{\mathcal{A}} \mid p$

由命题 7.2 (iii) 和 (ii)

$\mu_{\mathcal{A},\vec{v}} = p$ 且 $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}} \mid \mu_{\mathcal{A}}$

于是 $\mu_{\mathcal{A}} = p$。

$\mathcal{A}$ 在 $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \cdots, \mathcal{A}^{n-1}(\vec{v})$ 下的矩阵

$$(\mathcal{A}(\vec{v}), \mathcal{A}^2(\vec{v}), \cdots, \mathcal{A}^n(\vec{v})) = (\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \cdots, \mathcal{A}^{n-1}(\vec{v}))\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \chi_{\mathcal{A}}(t) = \begin{vmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & \alpha_0 \\ -1 & t & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & t+\alpha_{n-1} \end{vmatrix} = p(t) \text{ (习题 7)}$$

∎