回忆：设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果存在 $\vec{v} \in V$ 使得 $V = F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$. 则称 V 是 $\mathcal{A}$-循环空间，$\vec{v}$ 称为 V 关于 $\mathcal{A}$ 的一个循环向量

定理7.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果 V 是 $\mathcal{A}$-循环的，则 $\mu_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}}$.

定理7.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 $\chi_{\mathcal{A}}$ 零化 $\mathcal{A}$.
（亦称为 Hamilton–Cayley 定理）

证：设 $n = \dim V$. 对 n 归纳

$n=1$ 设 $\vec{v}$ 是 V 的基. 且 $\mathcal{A}(\vec{v}) = \alpha\vec{v}$, 其中 $\alpha \in F$. 则 $\mathcal{A}$ 在 $\vec{v}$ 下的矩阵是 $A = (\alpha)$. 由此可知 $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t-\alpha)$

$$\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} - \alpha\mathcal{E}$$

$\forall \vec{x} \in V$. $\exists\, \beta \in F$ 使得 $\vec{x} = \beta\vec{v}$

$$\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})(\vec{x}) = \mathcal{A}(\vec{x}) - \alpha\,\mathcal{E}(\vec{x}) = \mathcal{A}(\beta\vec{v}) - \alpha\beta\vec{v}$$
$$= \beta\,\mathcal{A}(\vec{v}) - (\alpha\beta)\vec{v} = (\beta\alpha)\vec{v} - (\alpha\beta)(\vec{v})$$
$$= \vec{0}.$$

于是 $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = 0$. $n=1$ 时. 定理成立.

设 $n>1$, 且 $\dim V < n$ 时定理成立.

设 $n = \dim V$.

<u>情形1</u> V 是 $\mathcal{A}$-循环的

由定理7.1. $\mu_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}}$. 于是 $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = 0$.

<u>情形2</u> V 不是 $\mathcal{A}$-循环的.

设 $\vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$, $d = \dim F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$. 则 $0<d<n$

令 $U = F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$. 则 U 是 $\mathcal{A}$-不变的

[命题7.1 (ii)] 再由推论6.2

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}_U}(t)\ \chi_{\overline{\mathcal{A}}}(t)$$

其中 $\overline{\mathcal{A}}$ 是关于 U 的商算子.

于是 $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \chi_{\mathcal{A}_U}(\mathcal{A}) \circ \chi_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathcal{A})$ (*)

设 $\vec{x}\in V$. 由§6最后一个例子

$$\chi_{\bar{\mathcal{A}}}(\mathcal{A})(\vec{x})+U=\chi_{\bar{\mathcal{A}}}(\bar{\mathcal{A}})(\vec{x}+U) \quad (**)$$

由归纳假设. $\chi_{\bar{\mathcal{A}}}(\bar{\mathcal{A}})$ 是 V/U 上的零算子

由 $(**)$, $\vec{u}:=\chi_{\bar{\mathcal{A}}}(\mathcal{A})(\vec{x})\in U$

于是 $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})(\vec{x})\overset{(*)}{=}\chi_{\mathcal{A}_U}(\mathcal{A})\circ\chi_{\bar{\mathcal{A}}}(\mathcal{A})(\vec{x})$

$$=\chi_{\mathcal{A}_U}(\mathcal{A})(\vec{u})=\chi_{\mathcal{A}_U}(\mathcal{A}_U)(\vec{u})$$

$$=\vec{0}$$ [对 U, $\mathcal{A}_U$ 用归纳假设]

由此可知 $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})=\mathcal{O}$. ∎

推论7.1 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 则 $\mu_{\mathcal{A}}\mid\chi_{\mathcal{A}}$. 特别地. $\deg\mu_{\mathcal{A}}\le\dim V$

证: 由定理7.2和引理4.2, $\mu_{\mathcal{A}}\mid\chi_{\mathcal{A}}$ ∎

推论7.2 设 $A\in M_n(F)$. 则 $\chi_A(A)=O_{n\times n}$

特别地 $\deg\mu_A\le n$

证: 设 $\mathcal{A}: F^n\to F^n$, $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\mapsto A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

$\because$ $\chi_{\mathcal{A}}=\chi_A$ 且 $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})=\mathcal{O}$

$\therefore$ $\cancel{\chi_A=(A}$ $\chi_A(A)=O_{n\times n}$ (命题4.1(i))

例 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&2\end{bmatrix}$. 求

$$B=-A^3+4A^2+5A-2E.$$

解 $\chi_A=\begin{vmatrix}t-1&0&-2\\0&t-1&-1\\0&0&t-2\end{vmatrix}=(t-1)^2(t-2)$

$$=t^3-4t^2+5t-2$$

设 $f=-t^3+4t^2+5t-2$

$$f+\chi_A=10t-4$$

$$B=f(A)=-\chi_A(A)+10A-4E$$
$$=10A-4E=\begin{pmatrix}6&0&20\\0&6&10\\0&0&16\end{pmatrix}$$

例: $\chi_A = |tE - A|$?

$\chi_A(A) = |AE - A| = |A - A| = |O_{n\times n}| = 0$

§8 广义特征子空间

引理 8.1 设 $p_1, \dots, p_k \in F[t]$, 两两互素

则: (i) $p_1 \cdots p_{k-1}$ 与 p_k 互素

(ii) $\mathrm{lcm}(p_1, \dots, p_{k-1}, p_k) = p_1 \cdots p_{k-1} p_k$

证: 见讲义1. p10. 引理 5.1. 把整数 $m_1, \dots, m_k$ 换成多项式 $p_1, \dots, p_k$ 即可 ☒

引理 8.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. U 是 $\mathcal{A}$-子空间 $p \in F[t]$. 则 U 也是 $p(\mathcal{A})$-子空间

证: 断言: $\forall k \in \mathbb{N}$. U 是 $\mathcal{A}^k$-子空间

断言的证明: $k = 0, 1$ 显然.

设 U 是 $\mathcal{A}^{k-1}$-子空间, 其中 $k > 1$

则 $\forall \vec{x} \in U$. $\mathcal{A}^{k-1}(\vec{x}) \in U$

$\because$ U 是 $\mathcal{A}$-子空间 $\mathcal{A}(\mathcal{A}^{k-1}(\vec{x})) = \mathcal{A}^k(\vec{x}) \in U$.

断言成立.

$p(\mathcal{A})(\vec{x})$ 是 $\mathcal{A}^0(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{x}), \dots, \mathcal{A}^d(\vec{x})$ 在 F 上的线性组合, 其中 $d = \deg p$.

于是 $\vec{x} \in U \Rightarrow p(\mathcal{A})(\vec{x}) \in U$ ☒

定理 8.1 (核核分解定理之加强版).

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $f \in F[t]$ 零化 $\mathcal{A}$.

设 $f = pq$, 其中 $p, q \in F[t] \setminus F$ 且 $\gcd(p, q) = 1$.

令 $K_p = \ker(p(\mathcal{A}))$, $K_q = \ker(q(\mathcal{A}))$

则 (i) $V = K_p \oplus K_q$

(ii) $p(\mathcal{A})|_{K_q}$ 和 $q(\mathcal{A})|_{K_p}$ 上是双射

证: (i) 核核分解定理 (定理 2.4)

(ii) $\because$ K_q 是 $\mathcal{A}$-不变的 (推论 3.)

$\therefore$ K_q 是 $p(\mathcal{A})$-不变的 (引理 8.2)

于是 $p(\mathcal{A})|_{K_q}$ 是 K_q 上的线性算子.

③

由命题2.2可知. 我们只要验证

$p(\mathcal{A})|_{K_q}$ 上是单射.

设 $\vec{v} \in K_q$ 且 $p(\mathcal{A})(\vec{v}) = \vec{0}$. $\because \gcd(p, q) = 1$

$\therefore \exists\ a, b \in F[t]$ 使得

$$a(t)p(t) + b(t)q(t) = 1$$

$$\Rightarrow a(\mathcal{A}) \circ p(\mathcal{A}) + b(\mathcal{A}) \circ q(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$$

$$\Rightarrow a(\mathcal{A}) \circ p(\mathcal{A})(\vec{v}) + b(\mathcal{A}) \circ q(\mathcal{A})(\vec{v}) = \vec{v}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$$ ☒

定义: 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$,

$\mu_{\mathcal{A}} = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$ 是 $\mu_{\mathcal{A}}$ 在 $F[t]$ 的不可约分解, 其中 $p_1, \ldots, p_k \in F[t] \setminus F$ 不可约, 首一, 两两互素, $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{Z}^+$

称 $\ker(p_i^{m_i}(\mathcal{A}))$ 为 p_i 对应的广义特征子空间, $i = 1, 2, \ldots k$. 记 $\ker(p_i^{m_i}(\mathcal{A}))$ 为 $V(p_i)$.

定理8.2 利用上述定义中的记号. 我们有

(i) $V = V(p_1) \oplus \cdots \oplus V(p_k)$

(ii) $p_i^{m_i}$ 是 $\mathcal{A}|_{V(p_i)}$ 的极小多项式, $i = 1, \ldots k$

(iii), $p_i(\mathcal{A})$ 在 $V(p_1) \oplus \cdots \oplus V(p_{i-1}) \oplus V(p_{i+1}) \oplus \cdots \oplus V(p_k)$ 上的限制是双射. $i = 1, 2, \ldots k$.

证: (i) 对 k 归纳.

当 $k = 1$ 时. $\mu_{\mathcal{A}} = p_1^{m_1}$

$$V(p_1) = \ker(p_1^{m_1}(\mathcal{A})) = \ker(\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})) = \ker(\mathcal{O}) = V.$$

结论(i)成立

设 $k > 1$ 且定理对 $k-1$ 成立

令 $p = p_1^{m_1} \cdots p_{k-1}^{m_{k-1}}$, $q = p_k^{m_k}$

$K_p = \ker(p(\mathcal{A}))$, $K_q = \ker(q(\mathcal{A})) = V(p_k)$

由定理8.1 $V = K_p \oplus K_q$

令 $\mathcal{A}_p = \mathcal{A}|_{K_p}$, $\mathcal{A}_q = \mathcal{A}|_{K_q}$

由 $p(\mathcal{A}_p)=\mathcal{O}$, $q(\mathcal{A}_q)=\mathcal{O}$

$\mu_{\mathcal{A}_p} \mid p \qquad \mu_{\mathcal{A}_q} \mid q$

$\because \gcd(p, q)=1 \quad \therefore \gcd(\mu_{\mathcal{A}_p}, \mu_{\mathcal{A}_q})=1$

由定理4.1

$pq=\mu_{\mathcal{A}} = \mathrm{lcm}(\mu_{\mathcal{A}_p}, \mu_{\mathcal{A}_q}) \overset{\text{引理8.1}}{=} \mu_{\mathcal{A}_p}\mu_{\mathcal{A}_q}$

于是 $\mu_{\mathcal{A}_p}=p$. $\quad \mu_{\mathcal{A}_q}=q$

将归纳假设用于 K_p, $\mathcal{A}_p$, $\mu_{\mathcal{A}_p}=p$

得 $K_p=U(p_1)\oplus\cdots\oplus U(p_{k-1})$

其中 $U(p_j)=\ker(p_j^{m_j}(\mathcal{A}_p))$

注: $0<\dim K_p<n$. 否则 $p_1^{m_1}\cdots p_{k-1}^{m_{k-1}}$

或 $p_k^{m_k}$ 为 $\mathcal{A}$ 的极小多项式 $\rightarrow\leftarrow$

于是 $V=U(p_1)\oplus\cdots\oplus U(p_{k-1})\oplus V(p_k)$

$\because U(p_j)\subset V(p_j)$, $j=1,2,\cdots k-1$

$\therefore V=V(p_1)+\cdots+V(p_{k-1})+V(p_k)$

我们再证上面的和式是直和.

设 $\vec{0}=\vec{v_1}+\cdots+\vec{v_{k-1}}+\vec{v_k} \quad (*)$

其中 $\vec{v_j}\in V(p_j)$, $j=1,2,\cdots,k$

若 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_{k-1}},\vec{v_k}$ 不全为零

不妨设 $\vec{v_1}\neq\vec{0}$

由引理8.1. $\gcd(p_1^{m_1}, p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k})=1$

$\exists\, a, b\in F[t]$ 使得

$a(t)p_1^{m_1}(t)+b(t)p_2^{m_2}(t)\cdots p_k^{m_k}(t)=1$

$a(\mathcal{A})p_1^{m_1}(\mathcal{A})+b(\mathcal{A})p_2^{m_2}(\mathcal{A})\cdots p_k^{m_k}(\mathcal{A})=\mathcal{E}$

$b(\mathcal{A})p_2^{m_2}(\mathcal{A})\cdots p_k^{m_k}(\mathcal{A})=\mathcal{E}-a(\mathcal{A})p_1^{m_1}(\mathcal{A})$

作用于 $(*)$ 得

$\vec{0}=b(\mathcal{A})p_2^{m_2}(\mathcal{A})\cdots p_k^{m_k}(\mathcal{A})(\vec{0})$

$=[\mathcal{E}-a(\mathcal{A})p_1^{m_1}(\mathcal{A})](\vec{v_1})+\sum_{i=2}^{k}b(\mathcal{A})p_2^{m_2}(\mathcal{A})\cdots p_k^{m_k}(\mathcal{A})(\vec{v_i})$

$= \mathcal{E}(\vec{v_1}) = \vec{v_1} \Rightarrow \vec{v_1} = \vec{0}$ $\rightarrow\leftarrow$.

由第一章命题2.1

$$V = V(p_1) \oplus \cdots \oplus V(p_k)$$

(ii) 设 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{V(p_i)}$

$\because$ $V(p_i) = \ker(p_i^{m_i}(\mathcal{A}))$

$\therefore$ $p_i^{m_i}(\mathcal{A}_i) = 0$

$\Rightarrow \mu_{\mathcal{A}_i} \mid p_i^{m_i}$, $i = 1, 2 \dots k$

$\Rightarrow \mu_{\mathcal{A}_1}, \dots \mu_{\mathcal{A}_k}$ 互素

由定理4.1

$$\mu_{\mathcal{A}} = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$$

$$= \mathrm{lcm}(\mu_{\mathcal{A}_1}, \dots \mu_{\mathcal{A}_k})$$

$$= \mu_{\mathcal{A}_1} \cdots \mu_{\mathcal{A}_k} \quad (\text{引理}8.2)$$

$\Rightarrow \mu_{\mathcal{A}_i} = p_i^{m_i}$, $i = 1, 2 \dots k$

(iii) 由定理8.1 (iii)

$g(\mathcal{A}) = p_k^{m_k}(\mathcal{A})$ 在

$K_p = V(p_1) \oplus \cdots \oplus V(p_{k-1})$ 上是

双射. 适当调整下标后可知

$\forall i \in \{1, \dots k\}$

$p_i^{m_i}(\mathcal{A})$ 在 $V(p_1) \oplus \cdots \oplus V(p_{i-1}) \oplus V(p_{i+1}) \oplus \cdots \oplus V(p_k)$

上也是双射 $\boxtimes$

推论8.1. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$

则 $\mathcal{A}$ 可对角化

$\iff \mu_{\mathcal{A}}(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_k)$

其中 $\lambda_1, \dots \lambda_k \in F$ 两两不同.

证："$\Rightarrow$" 设 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$ 是 V 的一组基

且 A 在 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$ 下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n\end{pmatrix},\quad \alpha_i\in F$$

设 $\alpha_1,\dots\alpha_n$ 中互不相同的元素是 $\lambda_1,\dots\lambda_k$

由定理 4.1

$$\mu_A=\mathrm{lcm}(t-\alpha_1,\dots t-\alpha_k)$$
$$=\mathrm{lcm}(t-\lambda_1,\dots t-\lambda_k)=\underbrace{(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_k)}_{\text{引理8.1}}$$

"$\Leftarrow$" 由定理 8.2

$$V=V(t-\lambda_1)\oplus\cdots\oplus V(t-\lambda_k)$$
$$V(t-\lambda_i)=\{\vec{v}\in V \mid (t-\lambda_i)(A)(\vec{v})=\vec{0}\}$$
$$=\{\vec{v}\in V \mid A(\vec{v})=\lambda_i\vec{v}\}$$
$$=V^{\lambda_i}.$$

$\Rightarrow$ $V=V^{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V^{\lambda_k}$

$\Rightarrow$ A 可对角化 （定理5.3） ▢

推论 8.2　设 $A\in M_n(F)$. 则

A 可对角化 $\Longleftrightarrow$ $\mu_A=(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_k)$

其中 $\lambda_1,\dots\lambda_k\in F$. 两两不同.

证：把 A 看成 F^n 上的线性变换，再用推论8.1即可 ▢

例：设 $A\in M_n(F)$, $A^2=E$. 讨论 A 能否对角化.

解：设 $p(t)=t^2-1$. 则 $p(A)=O_{n\times n}$

由定理 4.1. $\mu_A \mid p(t)=(t-1)(t+1)$

<u>情形1</u>　$\mu_A=t-1 \Rightarrow A=E$ 可对角化

<u>情形2</u>　$\mu_A=t+1 \Rightarrow A=-E$ 可对角化

情形3　$\mu_A=(t-1)(t+1)$

情形3.1.　$1\neq-1$ 即 $\mathrm{char}(F)\neq2$

则由推论8.2. A 可对角化

情形3.2　$\mathrm{char}(F)=2$. $\mu_A=(t-1)^2$

则由推论8.2. μ_A 不能对角化.

推论8.3　设 $A\in M_n(\mathbb{C})$. 则

A 可对角化 $\Leftrightarrow \gcd(\mu_A, \mu_A')=1$.

证:　由代数学基本定理.

$$\mu_A(t)=(t-\lambda_1)^{m_1}\cdots(t-\lambda_k)^{m_k}$$

其中 $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{C}$, 两两不同

$m_1,\dots,m_k\in\mathbb{Z}^+$

由本学期第一次习题课 定理1

$m_1=\cdots=m_k=1 \Leftrightarrow \gcd(\mu_A, \mu_A')=1$

再用推论8.2. 推论得证 ☐

例:　设 $A\in M_n(\mathbb{C})$. $\alpha\in\mathbb{C}$, $m\in\mathbb{Z}^+$

设 $A^m=\alpha E$. 讨论 A 是否可对角化.

解:　设 $p(t)=t^m-\alpha$ 则 $p(A)=O_{n\times n}$

$p'(t)=mt^{m-1}$

当 $\alpha\neq 0$ 时 $\gcd(p,p')=1$. 由推论8.2

A 可对角化

当 $\alpha=0$. $m=1$ 时

$A=O_{n\times n}$ 可对角化

否则 $t \mid \gcd(t^m, mt^{m-1})$

$\Rightarrow$ 当 $A^m=O_{n\times n}$, $m>1$ 时 A 不能对角化

命题8.1　设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 则 $\exists\, m\in\mathbb{N}$

使得 (i) $\ker(\mathcal{A}^m)=\ker(\mathcal{A}^{m+1})$.

(ii) 当(i)成立时 $\ker(\mathcal{A}^m)=\ker(\mathcal{A}^k)$

$\forall k\geq m$.

证: (i)　先证: $\forall\, i,j\in\mathbb{N}$. $i<j$

$\ker(\mathcal{A}^i)\subset\ker(\mathcal{A}^j)$.　(*)

设 $\vec{v}\in\ker(\mathcal{A}^i)$　则 $\mathcal{A}^i(\vec{v})=\vec{0}$

$\Rightarrow \mathcal{A}^j(\vec{v})=\mathcal{A}^{j-i}\circ\mathcal{A}^i(\vec{v})=\mathcal{A}^{j-i}(\vec{0})=\vec{0}$

$\Rightarrow \vec{v}\in\ker(\mathcal{A}^j)$.

于是我们有升链

$\ker(\mathcal{A}^0)\subset\ker(\mathcal{A})\subset\ker(\mathcal{A}^2)\subset\cdots$

和

$\dim(\ker(\mathcal{A}^0))\leq\dim(\ker(\mathcal{A}))\leq\dim(\ker(\mathcal{A}^2))\leq\cdots$

$\because$ $\ker(\mathcal{A}^i) \subset \dim V < \infty$

$\therefore$ $\exists\, m \in \mathbb{N}$ 使得

$\dim(\ker(\mathcal{A}^m)) = \dim(\ker(\mathcal{A}^{m+1}))$

又因为 $\ker(\mathcal{A}^m) \subset \ker(\mathcal{A}^{m+1})$

于是 $\ker(\mathcal{A}^m) = \ker(\mathcal{A}^{m+1})$ [第一章之习题7.2]

(ii) 设 $\ker(\mathcal{A}^m) = \ker(\mathcal{A}^{m+1})$.

要证：$\ker(\mathcal{A}^m) = \ker(\mathcal{A}^k)$, $k > m$

只要证：$\ker(\mathcal{A}^{m+1}) = \ker(\mathcal{A}^{m+2})$

由(i)可知. $\ker(\mathcal{A}^{m+1}) \subset \ker(\mathcal{A}^{m+2})$

反之：设 $\vec{v} \in \ker(\mathcal{A}^{m+2})$

则 $\mathcal{A}^{m+2}(\vec{v}) = \vec{0}$

$\Rightarrow \mathcal{A}^{m+1}(\mathcal{A}(\vec{v})) = \vec{0}$

$\Rightarrow \mathcal{A}(\vec{v}) \in \ker(\mathcal{A}^{m+1}) = \ker(\mathcal{A}^m)$

$\exists\, \vec{w} \in \ker(\mathcal{A}^m)$ 使得

$\vec{w} = \mathcal{A}(\vec{v})$

$\vec{0} = \mathcal{A}^m(\vec{w}) = \mathcal{A}^{m+1}(\vec{v})$

~~于是 $\vec{v} \in \ker(\mathcal{A}^{m+1})$~~

于是 $\vec{v} \in \ker(\mathcal{A}^{m+1})$

由此可知：$\ker(\mathcal{A}^{m+1}) = \ker(\mathcal{A}^{m+2})$ ▨

推论8.4 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$

$U = \{\vec{v} \in V \mid \exists\, k \in \mathbb{N}.\ \mathcal{A}^k(\vec{v}) = \vec{0}\}$

则 $U = \bigcup_{k=0}^{\infty} \ker(\mathcal{A}^k)$

且 $\exists\, m \in \mathbb{N}$. 使得 $U = \ker(\mathcal{A}^m)$

证：由 U 的定义直接可得

$U = \bigcup_{k=0}^{\infty} \ker(\mathcal{A}^k)$.

由命题8.1 $\exists\, m \in \mathbb{N}$ 使得

$\ker(\mathcal{A}^0) \subsetneq \ker(\mathcal{A}^1) \subsetneq \cdots \subsetneq \ker(\mathcal{A}^{m-1})$

$\subsetneq \ker(\mathcal{A}^m) = \ker(\mathcal{A}^{m+1}) = \ker(\mathcal{A}^{m+1})$

$= \cdots$

于是 有 $\bigcup_{k=0}^{\infty} \ker(\mathcal{A}^k) = \ker(\mathcal{A}^m)$ ▨

注： 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$

$$\mu_{\mathcal{A}} = p_1^{m_1}\cdots p_k^{m_k} \text{ 是}$$

$\mu_{\mathcal{A}}$ 在 $F[x]$ 中的因式分解.

则 $\forall i\in\{1,2,\dots k\}$, 设 $K_i^{(j)} = \ker(p_i(\mathcal{A})^j)$

则 $K_i^{(0)} \subsetneqq K_i^{(1)} \subsetneqq \cdots \subsetneqq K_i^{(m_i-1)} \subsetneqq K_i^{(m_i)} = K_i^{(m_i+1)} = \cdots$

$$K_i^{(m_i)} = V(p_i)$$

证： 由推论 8.4. 只要证：

$$K_i^{(m_i-1)} \subsetneqq K_i^{(m_i)} = K_i^{(m_i+1)}$$

不妨设 $i =$ [redacted]

$$p = p_1^{m_1},\quad q = p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k}$$

由定理 8.1

$$V = K_p \oplus K_q,$$

其中 $K_p = K_1^{(m_1)} = \ker(p(\mathcal{A}))$, $K_q = \ker(q(\mathcal{A}))$

假设

$$K_1^{(m_1-1)} = K_1^{(m_1)}$$

则 $V = K_1^{(m_1-1)} \oplus K_q$, $K_1^{(m_1-1)} = K_p$

设 $\mathcal{A}|_{K_p} = \mathcal{A}_p$, $\mathcal{A}|_{K_q} = \mathcal{A}_q$

$\mu_{\mathcal{A}_p} \mid p_1^{m_1-1}$ $\quad$ ($\because K_p = \ker(p_1^{m_1-1}(\mathcal{A}))$)

$\mu_{\mathcal{A}_q} \mid q$

$\Rightarrow \mu_{\mathcal{A}} \mid p_1^{m_1-1} q \Rightarrow (p_1^{m_1} q) \mid (p_1^{m_1-1} q)$

$\Rightarrow p_1^{m_1} \mid p_1^{m_1-1}$ $\rightarrow\leftarrow$

于是 $K_1^{(m_1-1)} \subsetneqq K_1^{(m_1)}$

再证： $K_1^{(m_1)} = K_1^{(m_1+1)}$

已知 $K_1^{(m_1)} \subset K_1^{(m_1+1)}$,

设 $\vec{v} \in K_1^{(m_1+1)}$, $\vec{v}_p \in K_p$, $\vec{v}_q \in K_q$

$$\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{v}_q,$$

$$p_1(\mathcal{A})^{(m_1+1)}(\vec{v}) = p_1^{(m_1+1)}(\mathcal{A})(\vec{v}_p) + p_1^{(m_1+1)}(\mathcal{A})(\vec{v}_q)$$

$$p_1(\mathcal{A})^{(m_1+1)}(\vec{v}) = \vec{0},\quad p_1^{(m_1+1)}(\mathcal{A})(\vec{v}_p) = \vec{0}$$

于是

$$P_1(A)^{m_1+1}(\vec{v}_q)=\vec{0}$$

$\because P_1^{m_1}(A)$ 在 K_q 上的是双射

$P_1(A)(\vec{v}_q)=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{v}_q=\vec{0}$

$\therefore$

于是 $\vec{v}_q=\vec{0}$

$\Rightarrow \vec{v}=\vec{v}_p \in K_p \Rightarrow K_1^{(m_1+1)} \subset K_1^{(m_1)}$ ☒

$$\begin{array}{ccccc}
K_1^{(0)} & \cdots & K_2^{(0)} & \cdots & K_k^{(0)} \\
\cap & & \cap & & \cap \\
K_1^{(1)} & \cdots & K_2^{(1)} & \cdots & K_p^{(1)} \\
\cap & & \cap & & \cap \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
K_1^{(m_1+1)} & & K_2^{(m_2-1)} & & K_p^{(m_k-1)} \\
\cap & & \cap & & \cap \\
\boxed{K_1^{(m_1)}} & & \boxed{K_2^{(m_2)}} & & \boxed{K_k^{(m_k)}} \\
\| & & \| & & \| \\
K_1^{(m_1+1)} & & K_2^{(m_2+1)} & & K_2^{(m_k+1)} \\
\| & & \| & & \| \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\| & & \| & & \\
\bigcup_{j=0}^{\infty} K_1^{(j)} & & \bigcup_{j=0}^{\infty} K_2^{(j)} & & \bigcup_{j=0}^{\infty} K_p^{(j)}
\end{array}$$

$$V=K_1^{(m_1)} \oplus K_2^{(m_2)} \oplus \cdots \oplus K_k^{(m_k)}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\| & & \| & & \| \\
\bigcup_{j=0}^{\infty} K_1^{(j)} & & \bigcup_{j=0}^{\infty} K_2^{(j)} & & \bigcup_{j=0}^{\infty} K_k^{(j)}
\end{array}$$

$\downarrow$

广义特征子空间分解

§9 循环子空间分解

定理9.1. 设 $A\in\mathcal{L}(V)$, 则 $\exists\, \vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_\ell \in V\setminus\{\vec{0}\}$ 使得

$$V=F[A]\cdot\vec{v}_1\oplus\cdots\oplus F[A]\cdot\vec{v}_\ell$$

证: 设 $n=\dim V$. 对 n 归纳

$n=1$. 设 $\vec{v}\in V\setminus\{\vec{0}\}$.

则 $\dim F[A]\cdot\vec{v}=1$.

于是 $V=F[A]\cdot\vec{v}$ 定理成立

设 $n>1$ 且 $\dim V<n$ 时 定理成立

如果 V 是 A-循环的. 则 $\ell=1$ 定理成立

设 V 不是 $\mathcal{A}$-循环的. 则存在 $\vec{w} \in V$ 使得 $m = \dim(F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w}) < n$ 且 $\forall \vec{v} \in V \quad \dim(F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}) \leq m$.

我们将构造 $\mathcal{A}$-子空间 $\mathcal{U}$ 使得

$$V = (F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w}) \oplus \mathcal{U} \qquad (*)$$

由命题 7.1 (iii)

$\vec{w}, \mathcal{A}(\vec{w}), \cdots \mathcal{A}^{m-1}(\vec{w})$ 是 $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w}$ 的一组基. 设

$\vec{w}, \mathcal{A}(\vec{w}), \cdots, \mathcal{A}^{m-1}(\vec{w}), \vec{\varepsilon}_{m+1}, \cdots, \vec{\varepsilon}_n$

是 V 的一组基. 由第一章 定理 6.2 $\exists!$ 线性函数 $f: V \longrightarrow F$ 满足

$$f(\mathcal{A}^i(\vec{w})) = 0, \quad i = 0, 1, \cdots, m-2$$

$$f(\mathcal{A}^{m-1}(\vec{w})) = 1$$

$$f(\vec{\varepsilon}_j) = 0, \quad j = m+1, \cdots n$$

再定义线性映射

$$\varphi: \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & F^m \\ \vec{x} & \longmapsto & \begin{pmatrix} f(\vec{x}) \\ f\circ\mathcal{A}(\vec{x}) \\ \vdots \\ f\circ\mathcal{A}^{m-1}(\vec{x}) \end{pmatrix} \end{array}$$

φ 是线性的 可直接验证. 或见第一学期讲义 7. 命题 3.2

断言 1 φ 在基底 $\vec{w}, \mathcal{A}(\vec{w}), \cdots \mathcal{A}^{m-1}(\vec{w}), \vec{\varepsilon}_{m+1} \cdots \vec{\varepsilon}_n$; $\vec{e}_1, \cdots \vec{e}_m$ 下的矩阵是 $A = (B|C)_{m\times n}$

其中 $B \in GL_m(F)$, $C \in F^{m\times(n-m)}$ $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_m$ 是 F^m 的标准基

<u>断言 1 的证明</u> $\forall i \in \{0, 1, \cdots, m-1\}$,

$$\varphi(\mathcal{A}^i(\vec{w})) = \begin{pmatrix} f\circ\mathcal{A}^i(\vec{w}) \\ f\circ\mathcal{A}^{i+1}(\vec{w}) \\ \vdots \\ f\circ\mathcal{A}^{m-1}(\vec{w}) \\ \vdots \\ f\circ\mathcal{A}^{m-1+i}(\vec{w}) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow m-i \\ \\ \\ \end{array} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow m-i \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

设 $(\varphi(\vec{\varepsilon}_{m+1}), \cdots \varphi(\vec{\varepsilon}_n)) = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_m)\, C$

其中 $C \in F^{m\times(n-m)}$

$(\varphi(\vec{w}), \varphi(A(\vec{w})), \cdots, \varphi(A^{m-1}(\vec{w})), \varphi(\vec{\varepsilon}_{m+1}) \cdots \varphi(\vec{\varepsilon}_n))$

$$= (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_m) \underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 1 & \\ \vdots & \vdots & & x & \\ 0 & 0 & & \vdots & C \\ 0 & 1 & & \vdots & \\ 1 & x & \cdots & x & \end{array}\right)}_{A}$$

(the first m columns are labelled B)

断言1 成立

断言2 $\ker(\varphi)$ 是 $(n-m)$ 维 A-子空间

断言证明 由断言1. $\operatorname{rank}(\varphi) = \operatorname{rank}(A) = m$

~~$\dim(\varphi)\cdot$~~

$\dim(\ker(\varphi)) = n - \operatorname{rank}(\varphi) = n - m.$

设 $\vec{x} \in \ker(\varphi)$, $k = \dim F[A]\cdot\vec{x}$.

则 $\vec{x}, A(\vec{x}), \cdots A^{k-1}(\vec{x})$ 是 $F[A]\cdot\vec{x}$ 的一组基，且 $k \le m$ (m的选择)

(命题3.1(iii))

于是 $A^m(\vec{x}) = \alpha_0\vec{x} + \alpha_1 A(\vec{x}) + \cdots + \alpha_{m-1} A^{m-1}(\vec{x})$

其中 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots \alpha_{m-1} \in F$.

$$\varphi(A(\vec{x})) = \begin{pmatrix} f\circ A(\vec{x}) \\ \vdots \\ f\circ A^{m-1}(\vec{x}) \\ f\circ A^m(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f\circ A(\vec{x}) \\ \vdots \\ f\circ A^{m-1}(\vec{x}) \\ \sum_{j=0}^{k} \alpha_j f\circ A^j(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

$\because \vec{x} \in \ker(\varphi)$ $\therefore$ $\varphi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f(\vec{x}) \\ f\circ A(\vec{x}) \\ \vdots \\ f\circ A^{m-1}(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \varphi(A(\vec{x})) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A(\vec{x}) \in \ker(\varphi)$

断言2 成立

断言3 $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w} \cap \ker(\varphi) = \{\vec{0}\}$

断言3的证明 设 $\vec{x} \in F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w} \cap \ker(\varphi)$

则 $\exists\ \beta_0, \cdots \beta_{m-1} \in F$ 使得

$$\vec{x} = (\vec{w}, \mathcal{A}(\vec{w}), \cdots, \mathcal{A}^{m-1}(\vec{w}))\begin{pmatrix}\beta_0\\ \vdots \\ \beta_{m-1}\end{pmatrix}$$

$$\vec{0}_m = \varphi(\vec{x}) = (\varphi(\vec{w}), \varphi(\mathcal{A}(\vec{w})), \cdots \varphi(\mathcal{A}^{m-1}(\vec{w})))\begin{pmatrix}\beta_0\\ \vdots \\ \beta_{m-1}\end{pmatrix}$$

$$= (\vec{w}, \mathcal{A}(\vec{w}), \cdots, \mathcal{A}^{m-1}(\vec{w}))\, B \begin{pmatrix}\beta_0\\ \vdots \\ \beta_{m-1}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B\begin{pmatrix}\beta_0\\ \vdots \\ \beta_{m-1}\end{pmatrix} = \vec{0}_m. \quad \because B \in GL_m(F)$$

$\therefore\ \beta_0 = \cdots = \beta_{m-1} = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$

断言3成立

设 $\mathcal{U} = \ker(\varphi)$. 由断言2和3可知

$$V = (F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w}) \oplus \mathcal{U}$$

且 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{A}$-子空间

$\therefore\ \dim\mathcal{U} < n$

由归纳假设

$$\mathcal{U} = (F[\mathcal{A}_\mathcal{U}]\cdot\vec{u}_1) \oplus \cdots \oplus (F[\mathcal{A}_\mathcal{U}]\cdot\vec{u}_s)$$

~~其中~~ 因为 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{A}$-不变的. 所以

$$F[\mathcal{A}_\mathcal{U}]\cdot\vec{u}_j = F[\mathcal{A}]\cdot\vec{u}_j$$

于是 $V = (F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w}) \oplus (F[\mathcal{A}]\cdot\vec{u}_1) \oplus \cdots \oplus (F[\mathcal{A}]\cdot\vec{u}_s)$ ☒

推论9.1 (Hamilton-Cayley定理加强版)

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$.

(i) $\mu_\mathcal{A} \mid \chi_\mathcal{A}$

(ii) 设 $p \in F[x]$ 是 $\chi_\mathcal{A}$ 的一个不可约因子.

则 $p \mid \mu_\mathcal{A}$

证: 由定理9.1

$$V = (F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}_1) \oplus \cdots \oplus (F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}_\ell)$$

设 $\mathcal{A}|_{(F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}_i)} = \mathcal{A}_i,\quad i = 1, 2, \ldots \ell.$

则 $\mathcal{A}_i\quad F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}_i = F[\mathcal{A}_i]\cdot\vec{v}_i$

且 $\mathcal{A}_i \in \mathcal{L}(F[\mathcal{A}_i]\cdot\vec{v}_i)$

由定理7.1

$$\mu_{A_i} = \chi_{A_i}, \quad i=1\cdots l$$

由定理8.1

$$\mu_A = \mathrm{lcm}(\mu_{A_1}, \cdots \mu_{A_l}) = \mathrm{lcm}(\chi_{A_1}, \cdots \chi_{A_l})$$

另一方面：存在 V 的一组基使得 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_l \end{pmatrix}$$

其中 A_i 是 $\mathcal{A}_i$ 在 $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}_i$ 的某组基下的矩阵（定理4.1）

$$\chi_A(t) = |tE_n - A| = \det\begin{pmatrix} tE_{d_1} - A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & tE_{d_l} - A_l \end{pmatrix}$$

其中 $d_i = \dim F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}_i, \quad i=1\cdots l$

$$\chi_A(t) = |tE_{d_1} - A_1| \cdots |tE_{d_l} - A_l| = \chi_{A_1}(t) \cdots \chi_{A_l}(t)$$

于是 ~~μ_A~~ (i) 和 (ii) 都成立 □

推论9.2、设 $A \in M_n(F)$.

则 (i) $\mu_A \mid \chi_A$

(ii) χ_A 的每个不可约因子都是 μ_A 的因子

证：设 $\mu_A = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$ 是 $F[t]$ 中不可约分解

则 χ_A 在 $F[t]$ 中的不可约分解是

$$\chi_A = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$$

其中 $0 < m_1 \le n_1, \cdots, 0 < m_k \le n_k$.

推论9.3 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$

则 (i) $\mu_A \mid \chi_A$

(ii) A 的特征根都是 μ_A 的根

证：此时 $\mu_A = (t-\lambda_1)^{m_1} \cdots (t-\lambda_k)^{m_k}$

$$\chi_A = (t-\lambda_1)^{n_1} \cdots (t-\lambda_k)^{n_k}$$

其中 $\lambda_1 \cdots \lambda_k \in \mathbb{C}$ 两两不同

$0 < m_1 \le n_1, \cdots 0 < m_k \le n_k$ 得