回忆：推论 9.1（Hamilton－Cayley 定理的加强版）

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$

(i) $\mu_{\mathcal{A}} \mid \chi_{\mathcal{A}}$　(ii) 设 $p \in F[t]$ 是 $\chi_{\mathcal{A}}$ 的不可约因子，则 $p \mid \mu_{\mathcal{A}}$.

注：上述推论说明：~~如果~~

$$\mu_{\mathcal{A}} = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$$

是 $\mu_{\mathcal{A}}$ 在 $F[t]$ 中的不可约分解，则

$$\chi_{\mathcal{A}} = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$$

且 $m_1 \le n_1, \ldots, m_k \le n_k$

由 §8 最后的内容可知

$$V(p_i) = \ker(p(\mathcal{A})^{m_i}) = \ker(p(\mathcal{A})^{n_i})$$

$i = 1, 2, \ldots, k$.

例：设 $\mathcal{A}: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

把 $\mathbb{R}^4$ 分解为关于 $\mathcal{A}$ 的广义特征子空间的直和

解．$\chi_{\mathcal{A}} = (t-1)^2 t^2$

$p_1 = t-1$，$p_2 = t$

$V(p_1) = \ker(p_1(\mathcal{A})^2)$．即是 $p_1(A)^2 \vec{x} = \vec{0}$ 的解空间．也就是

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & -3 \\ 0 & -7 & 12 & -5 \\ 0 & -9 & 15 & -6 \end{bmatrix}}_{p_1(A)^2} \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow V(p_1) = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_{11}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_{12}} \rangle$$

类似地 $V(p_2)$ 是 $p_2(A)^2 \vec{x} = \vec{0}$ 的解空间

$$V(p_2) = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_{21}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_{22}} \rangle$$

于是 $\mathbb{R}^4 = \langle \vec{v}_{11}, \vec{v}_{12} \rangle \oplus \langle \vec{v}_{21}, \vec{v}_{22} \rangle$

求 $\mathcal{A}$ 在 $\vec{v}_{11}, \vec{v}_{12}, \vec{v}_{21}, \vec{v}_{22}$ 下的矩阵

设 $P = (\vec{v}_{11}, \vec{v}_{12}, \vec{v}_{21}, \vec{v}_{22})$. 则

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

通过直接计算式利用 $\mu_A = \mu_B$ 可得

$$\mu_{\mathcal{A}} = (t-1)t^2$$

$$\Rightarrow V(p_1) = \overset{\ker(\mathcal{A}-\mathcal{E})}{\cancel{V(t-1)}} = V^{\lambda_1}, \quad \lambda_1 = 1$$

设 $\lambda_2 = 0$ 则 $V^{\lambda_2} = K \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \subsetneq V(p_2)$

$\chi_{\mathcal{A}} = p_1^2 p_2^2$, $\mu_{\mathcal{A}} = p_1 p_2^2$

$V^{\lambda_1} = V(p_1)$, $V^{\lambda_2} \subsetneq V(p_2)$

$\mathcal{A}$ 不能对角化.

推论 9.2 设 $A \in M_n(F)$. 则

(i) $\mu_A \mid \chi_A$ (ii) χ_A 在 $F[t]$ 的每个不可约因子都整除 μ_A.

推论 9.3 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$

则 (i) $\mu_A \mid \chi_A$ (ii) A 的特征根都是 μ_A 的根

证：由代数学基本定理

$$\mu_A = (t-\lambda_1)^{m_1} \cdots (t-\lambda_k)^{m_k}$$

其中 $\lambda_1, \cdots \lambda_k \in \mathbb{C}$ 两两不同. 由推论

9.2 $\chi_A = (t-\lambda_1)^{n_1} \cdots (t-\lambda_k)^{n_k}$

其中 $m_1 \le n_1, \cdots m_k \le n_k$ □

注：关于 ~~[illegible]~~ quick and dirty

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 回忆 p56, 习题9 (iii)

$\exists\, \vec{w}\in V$ 使得 $\mu_{\mathcal{A},\vec{w}}=\mu_{\mathcal{A}}$

证明见上周习题课讲义

取上述 $\vec{w}$ 证明存在 $\mathcal{A}$-子空间 U

使得 $V=(F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w})\oplus U$.

设 $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_d$ 是 $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w}$ 的基

$\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_d,\ \vec{v}_{d+1},\dots,\vec{v}_n$

是 V 的基. 则在该基下

$\mathcal{A}$ 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{pmatrix},\quad \text{其中 } A_1\in M_{d}(F),\ A_3\in M_{n-d}(F)$$

这是因为 $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w}$ 是 $\mathcal{A}$-不变的

引理 设 $\mathcal{B}\in\mathcal{L}(W)$, $d=\deg\mu_{\mathcal{B}}$.

H 是 $\mathcal{B}$-子空间. 如果

~~则~~ d-维空间, 则

W/H 是 $\bar{\mathcal{B}}$-循环的.

$\exists$ 存在 $\mathcal{B}$ 不变子空 $K\subset W$. 使得

$$W=H\oplus K$$

证：设 $W/H=F[\bar{\mathcal{B}}](\vec{w}+H)$

其中 $\vec{w}+H,\ \mathcal{B}(\vec{w})+H,\ \dots,\ \mathcal{B}^{d-1}(\vec{w})+H$

是 W/H 一组基. 则

$\vec{w},\ \mathcal{B}(\vec{w}),\ \dots,\ \mathcal{B}^{d-1}(\vec{w})$

线性无关. $\because d=\deg\mu_{\mathcal{B}}$,

$\mathcal{B}^d(\vec{w})\in\langle\vec{w},\mathcal{B}(\vec{w}),\dots,\mathcal{B}^{d-1}(\vec{w})\rangle$

$\Rightarrow \langle\vec{w},\mathcal{B}(\vec{w}),\dots,\mathcal{B}^{d-1}(\vec{w})\rangle=F[\mathcal{B}]\cdot\vec{w}$

是 $\mathcal{B}$-不变的. 可直接验证

$$W=H\oplus F[\mathcal{B}]\cdot\vec{w}\ \blacksquare$$

$$A^t = \begin{pmatrix} \boxed{A_1^t} & O \\ A_2^t & \boxed{A_3^t} \end{pmatrix}$$

循环

n-d 不变子空间 U^*

A^* 在 $\vec{v}_1^*, \dots, \vec{v}_d^*, \vec{v}_{d+1}, \dots, \vec{v}_n$ 在的基

且 V^*/U^* 是 A^*-循环的且

$\dim V^*/U^* = \cancel{n-1}\ d.$

由引理 $V^* = U^* \oplus F[A^*]\cdot f$

$\Rightarrow V = U \oplus F[A]\cdot \vec{w}$ □

§10 不可分子空间分解

定义. 设 $A \in \mathcal{L}(V)$, U 是 A-子空间 如果 U 不能写成两个真 A-子空间之和, 则称 ~~A~~ U 是 A-不可分的, 否则称 U 是 A-可分的.

定理10.1 设 $A \in \mathcal{L}(V)$. 则 V 是有限个 A-不可分子空间的直和.

证: 设 $n = \dim V$. 对 n 归纳.

$n=1$. V 是 A-不可分的. 定理成立

设 $\dim V$ 小于 n 时定理成立

考虑 n 时. 若 V 是 A-不可分的

是定理成立. 否则

$$V = V_1 \oplus V_2$$

其中 V_1, V_2 是 A-子空间 且

$\dim V_1 < \dim V$, $\dim V_2 < \dim V$

~~由~~ 归纳假设 V_1, V_2 都是 A-~~子空间~~

不可分子空间的直和.

于是 V 也是 □

⑤

引理10.1 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 则

V 是 $\mathcal{A}$-循环的 $\Longleftrightarrow \deg\mu_{\mathcal{A}}=\dim V$

证: "$\Longrightarrow$" 由定理7.1. $\mu_{\mathcal{A}}=\chi_{\mathcal{A}}$

由命题5.2. $\deg\chi_{\mathcal{A}}=\dim V\Rightarrow \deg\mu_{\mathcal{A}}=\dim V$

"$\Longleftarrow$" 由P56 引理9 (ii) $\exists\,\vec{v}\in V$

使得 $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}$ 的次数 $=\mu_{\mathcal{A}}$ 的次数

由命题7.2 $\dim(F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v})=\deg\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}$

$=\deg\mu_{\mathcal{A}}=\dim V$

$\Longrightarrow V=F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$ ▨

例: 在上节最后例子中 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$

但 $\mu_{\mathcal{A}}=(t-1)t^2$. 则 $\mathbb{R}^4$ 不是 $\mathcal{A}$-循环的

~~定理10.2 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. U 是 $\mathcal{A}$-子空间 则 U 是 $\mathcal{A}$-不可分的 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}_U$~~

定理10.2 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, 则 V 是 $\mathcal{A}$-不可分的

$\Longleftrightarrow \mu_{\mathcal{A}}$ 是 $F[t]$ 中某个不可约多项式的~~幂~~且

V 是 $\mathcal{A}$-循环的

证: "$\Rightarrow$" 若 $\mu_{\mathcal{A}}=pq$, $p,q\in F[t]$, $\gcd(p,q)=1$

则由核分解. $V=\ker(p(\mathcal{A}))\oplus\ker(q(\mathcal{A}))$

若 $\ker(p(\mathcal{A}))=\{\vec{0}\}$ 则 $V=\ker(q(\mathcal{A}))$

$\Rightarrow \mu_{\mathcal{A}}\mid q\Rightarrow p\in F$ $\rightarrow\leftarrow$. 于是 V 是 $\mathcal{A}$-可分

同理 $\ker(q(\mathcal{A}))\neq\{\vec{0}\}$.

"$\Leftarrow$" 由定理9.1, V 是若干 $\mathcal{A}$-循环子空间的直和. 所以由 V 的 $\mathcal{A}$-不可分性导致

V 必然是 $\mathcal{A}$-循环的

反之：设 $\mu_A = p^m$，其中 $p\in F[x]$，不可约

且 V 是 $\mathcal{A}$-循环的. 假设

$$V = V_1 \oplus V_2$$

其中 V_1, V_2 是 $\mathcal{A}$-不变的. 且 $\dim V_1>0$,

$\dim V_2>0$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{V_1}$, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}|_{V_2}$

由定理4.1, $p^m=\mu_{\mathcal{A}} = \mathrm{lcm}(\mu_{\mathcal{A}_1},\mu_{\mathcal{A}_2})$

于是 $\mu_{\mathcal{A}_1}=p^{m_1}$, $\mu_{\mathcal{A}_2}=p^{m_2}$, $m_1, m_2>0$

由此可知 $m_1=m$ 或 $m_2=m$.

不妨设 $m_1=m$

$\dim V_1 \geq \deg p^m$ （推论7.1）

$= \dim V$ （推论引理10.1）

$\Rightarrow V_1=V \Rightarrow V_2=\{\vec{0}\}$. $\rightarrow\leftarrow$.

即 V 是 $\mathcal{A}$ 不可分的.

例：设 $\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \longmapsto \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&-1\\0&0&2\end{pmatrix}}_{A}\vec{x}$

问：$\mathbb{R}^3$ 是不是 $\mathcal{A}$-循环的，是不是 $\mathcal{A}$-不可分的

证：$A^0 = \begin{pmatrix}1&0&\boxed{0}\\0&1&\boxed{0}\\0&0&\boxed{1}\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&0&\boxed{1}\\1&1&\boxed{-1}\\0&0&\boxed{2}\end{pmatrix}$, $A^2=\begin{pmatrix}1&0&\boxed{3}\\2&1&\boxed{-2}\\0&0&\boxed{4}\end{pmatrix}$

$\vec{v}_0$ $\qquad$ $\vec{v}_1$ $\qquad$ $\vec{v}_2$

$\because$ $\vec{v}_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ 线性无关

$\therefore$ A^0, A, A^2 线性无关

$\Rightarrow \deg \mu_A = 3 \Rightarrow \mathbb{R}^3$ 是 $\mathcal{A}$-循环的

$\mu_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}} = |tE-A| = (t-2)(t-1)^2$

于是 $\mathbb{R}^3$ 是 $\mathcal{A}$-可分的

事实上 $\mathbb{R}^3 = V_{(t-2)} \oplus V_{((t-1)^2)}$.

注：设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, U 是 $\mathcal{A}$ 不变的

则 $\forall \vec{u}\in U$ $\quad F[\mathcal{A}]\cdot\vec{u} = F[\mathcal{A}_U]\cdot\vec{u}$

定理10.3 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 则

$$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_l$$

其中 V_i 既是 $\mathcal{A}$-不可分的，也是 $\mathcal{A}$-循环的

且 $\mathcal{A}|_{V_i}$ 的极小多项式是 $F[t]$ 中的

某个不可约多项式的幂.

证：直接用定理10.1和10.2. ▨

§11 复数域上的 Jordan 块

问题：设 V 是 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性

空间，$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，且 $\mathcal{A}$-不可分的

求 V 的一组基 使得 $\mathcal{A}$ 在该基下

的矩阵尽可能简单？

由定理10.3，和代数学基本定理（和定理7）

$\mu_{\mathcal{A}}=(t-\lambda)^n$，~~$n\ge 0, \lambda\in\mathbb{C}$~~

其中 $\lambda\in\mathbb{C}$

由 Cayley-Hamilton 定理 加引理

$\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A})=\{\lambda\}$.

由定理10.2 $V=F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$.

令 $\vec{\varepsilon_i}=(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-i}(\vec{v})$，$i=1,2,\dots,n$

断言！ $\vec{\varepsilon_1},\dots,\vec{\varepsilon_n}$ 是 V 的一组基

断言的证明：$\because \dim V=n$

$\therefore$ 只要证 $\vec{\varepsilon_1},\dots,\vec{\varepsilon_n}$ 线性无关即可

设 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in F$ 使得

$$\alpha_1\vec{\varepsilon_1}+\cdots+\alpha_n\vec{\varepsilon_n}=\vec{0}$$

$$\alpha_1\vec{\varepsilon_1}+\alpha_2\vec{\varepsilon_2}+\cdots+\alpha_n(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^0(\vec{v})=\vec{0}$$

则 $\alpha_1(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-1}(\vec{v})+\alpha_2(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-2}(\vec{v})+\cdots+\alpha_n$. 则 $f(\mathcal{A})(\vec{v})=\vec{0}$

令 $f(t)=\alpha_1(t-\lambda)^{n-1}+\alpha_2(t-\lambda)^{n-2}+\cdots+\alpha_n$.

$\Rightarrow f(\mathcal{A})=\mathcal{O}$. $\because \deg f(t)=n-1$ 而 $\deg\mu_{\mathcal{A}}=n$

$\therefore f(t)$ 恒为零 $\Rightarrow f(t+\lambda)=0$

~~$\alpha_1=0$ ($\because$)~~

$\Rightarrow \alpha_1t^{n-1}+\alpha_2t^{n-2}+\cdots+\alpha_n=0$

$\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$ 断言成立

称 $\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_n$ 为 V 关于 $\mathcal{A}$ 的组 Jordan 基

下面求 $\mathcal{A}$ 在 $\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_n$ 下的矩阵

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(\vec{\varepsilon}_1) &= \mathcal{A}\circ(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-1}(\vec{v}) \\
&= (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}+\lambda\mathcal{E})(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-1}(\vec{v}) \\
&= [\underbrace{(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n}}_{0} + \lambda\underbrace{(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-1}(\vec{v})}_{\vec{\varepsilon}_1}] \\
&= \lambda\vec{\varepsilon}_1
\end{aligned}
$$

特别地 $\vec{\varepsilon}_1$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量

当 $i\in\{2,\dots,n\}$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(\vec{\varepsilon}_i) &= \mathcal{A}\circ(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-i}(\vec{v}) \\
&= (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}+\lambda\mathcal{E})\circ(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-i}(\vec{v}) \\
&= (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-(i-1)}(\vec{v}) + \lambda(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-i}(\vec{v}) \\
&= \vec{\varepsilon}_{i-1} + \lambda\vec{\varepsilon}_i
\end{aligned}
$$

于是

$$
(\mathcal{A}(\vec{\varepsilon}_1),\mathcal{A}(\vec{\varepsilon}_2),\dots,\mathcal{A}(\vec{\varepsilon}_n)) = (\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_n)\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda\end{pmatrix}}_{J_n(\lambda)}
$$

称 $J_n(\lambda)$ 为关于 λ 的 n 阶 Jordan 块 ⑧

断言2. $\mathcal{A}$ 的特征子空间

$$V^{\lambda} = \langle\vec{\varepsilon}_1\rangle$$

断言2的证明：已证 $\vec{\varepsilon}_1\in V^{\lambda}$

$$
\cancel{\gamma_A} = \operatorname{rank}(\lambda E - J_A) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0\\ & & & \ddots & \\ & & & & -1\\ 0 & \cdots & & 0 & 0\end{pmatrix}
$$

$= n-1$

于是 $\dim V^{\lambda} = 1 \Rightarrow V^{\lambda} = \langle\vec{\varepsilon}_1\rangle$ 断言2成立

由断言1，断言2和上述推导可得

定理11.1 设 V 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间，$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，且 V 是 $\mathcal{A}$-不可分的，

则 (i) $\operatorname{spec}(\mathcal{A}) = \{\lambda\}$

(ii) $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是 $J_n(\lambda)$

(iii) $\dim V^{\lambda} = 1$.

注：当 $F\neq\mathbb{C}$ 时，也可以类似的定义 F 上的 Jordan 块，但构造比较繁琐。

注：由定理11.1 (iii)，$J_n(\lambda)$ 可对角化 $\Longleftrightarrow n=1$.

例：$\mathcal{D}: \mathbb{C}_n[t] \longrightarrow \mathbb{C}_n[t]$
$p(t) \longmapsto p'(t)$

$\mathbb{C}_n[t]$ 是 $\mathcal{D}$ 不可分的，求一组基

证明，使得 $\mathcal{D}$ 在该基下的矩阵是 n 阶 Jordan 块

证：$\because \mathcal{D}^n = 0$ 但 $\mathcal{D}^{n-1}\neq 0$

$\therefore \mu_{\mathcal{D}} = t^n$ 由引理10.1.

$\mathbb{C}_n[t]$ 是 $\mathcal{D}$-循环的，~~再由~~ 定理10.2

$\mathbb{C}_n[t]$ 是 $\mathcal{D}$-不可分的

$$\mathbb{C}_n[t] = \mathbb{C}[\mathcal{D}]\cdot t^{n-1}$$

在 $\mathcal{D}^{n-1}t^{n-1}, \mathcal{D}^{n-2}t^{n-1}, \dots, \mathcal{D}t^{n-1}, \mathcal{D}^0 t^{n-1}$ 下

$\mathcal{D}$ 的矩阵为 $J_n(0)$.

§12 复方阵的Jordan标准型

定理12.1 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$

则 $\exists\, \lambda_1,\dots,\lambda_l\in\mathbb{C}$（不必两两不同）

和 $\exists\, d_1,\dots,d_l\in\mathbb{Z}^+$

使得
$$A \sim_s \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{d_l}(\lambda_l) \end{pmatrix} =: J_A$$

（称 J_A 为 A 的一个 Jordan 标准型）

证：设 $\mathcal{A}: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$
$\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \longmapsto A\vec{x}$

由定理11.1
$\mathbb{C}^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_l$ 其中

$V_1,\dots,V_l$ 是 $\mathcal{A}$-不可分的

设 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{V_i}$，则 $\mu_{\mathcal{A}_i} = (t-\lambda_i)^{d_i}$，$\lambda_i\in\mathbb{C}$

$\dim V_i = d_i$（引理10.1）

由定理11.1 ∃ V_i 的一组基

$$\vec{e}_{i1}, \cdots, \vec{e}_{i,d_i}$$

使得 $\mathcal{A}_i$ 在该基下的矩阵是 $J_{d_i}(\lambda_i)$

$i=1,2,\dots,l$

由定理3.1 $\mathcal{A}$ 在 V 的基底

$$\vec{e}_{11}, \cdots, \vec{e}_{1d_1}, \cdots, \vec{e}_{l1}, \cdots, \vec{e}_{l,d_l} \text{ 下}$$

的矩阵是

$$J_A = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\alpha_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{d_l}(\alpha_l) \end{pmatrix}.$$ 因

注: 适当调整 $V_1, \dots V_l$ 的次序.

J_A 可写成

$$J_A = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_k \end{pmatrix}$$

$$\text{其中 } B_i = \begin{pmatrix} J_{s_{i1}}(\lambda_i) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{s_{i k_i}}(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

$i=1,2,\dots k$. 且 $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$

命题12.1 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, J_A 如上述

注释略去. 则

$$\chi_A = (t-\lambda_1)^{n_1} \cdots (t-\lambda_k)^{n_k}$$

$$\mu_A = (t-\lambda_1)^{m_1} \cdots (t-\lambda_k)^{m_k}$$

其中 n_i 是 B_i 的行(列)数. (阶)

m_i 是 B_i 中 Jordan 块行(列)数最大者

且 ~~再设~~ λ_i 的几何重数为 k_i.

证: $\chi_A = \chi_{J_A}$ $(\because (A \sim_s J_A))$

设 n_i' 为 B_i 的阶, $i=1,2 \dots k$

设 B_i 是上三角矩阵

$\because J_A$ 是上三角矩阵

$\therefore \chi_{J_A} = (t-\lambda_1)^{n_1} \cdots (t-\lambda_k)^{n_k}$

由定理11.1 $J_{s_{i1}}(\lambda_i)$ 的极小多项式

是 $(t-\lambda_i)^{s_{i1}}$, $\cdots$, $J_{s_{i,k_i}}$ 的极小多项式

是 $(t-\lambda_i)^{s_{i,k_i}}$

由定理4.1, $\mu_{B_i} = \mathrm{lcm}\left((t-\lambda_i)^{s_{i1}}, \dots (t-\lambda_i)^{s_{i,k_i}}\right)$

$$= (t-\lambda_i)^{m_i}$$

其中 $m_i = \max(s_{i1}, \dots, s_{ik_i})$

再由定理4.1

$$\mu_A = \mathrm{lcm}(\mu_{B_1}, \dots, \mu_{B_k})$$
$$= \mathrm{lcm}\left((t-\lambda_1)^{m_1}, \dots, (t-\lambda_k)^{m_k}\right)$$
$$= (t-\lambda_1)^{m_1} \cdots (t-\lambda_k)^{m_k} \quad (\because \lambda_1 \dots \lambda_k \text{ 两两不同})$$

不妨设 $i=1$

$$\lambda_1 E - J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{n_1} - B_1 & & & \\ & \lambda_1 E_{n_2} - B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_1 E_{n_k} - B_k \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 E_{n_1} - B_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{s_{11}} - J_{s_{11}}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 E_{s_{1k_1}} - J_{s_{1k_1}}(\lambda_1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{matrix}\right\} s_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & \left.\begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{matrix}\right\} s_{1k_1} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathrm{rank}(\lambda_1 E - J_A)$
$= n - k_1 \Rightarrow$ 几何重数是 k_1. □

例：设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. 求 J_A

解：$\chi_A = (t-1)^2 t^2$

$$\mathrm{rank}(E-A) = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & -5 & 8 & -3 \\ 0 & -6 & 9 & -3 \end{pmatrix} = 2$$

$\lambda_1 = 1$ 的代数重数是2，几何重数是2

$\lambda_2 = 0 \quad \mathrm{rank}(-A) = 3$

λ_2 的代数重数是2. 几何重数是1

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(1) & & \\ & J_1(1) & \\ & & J_2(0) \end{pmatrix}$$

例：求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的 J_A

$\chi_A = (t-2)(t-1)^2$

$\lambda_1 = 2$. 代数和几何重数是1

$\lambda_2=1$. 代数重数是 2

$$\mathrm{rank}(E-A)=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&0&1\\0&0&-2\end{pmatrix}=2$$

$\Longrightarrow$ λ_2 是几何重数是 1

$$J_A=\begin{pmatrix}J_1(2)&\\&J_2(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

例：设 $\alpha\in\mathbb{C}$ $\quad A=\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&\alpha&0\\\alpha&0&\alpha\end{pmatrix}$

求 J_A.

$\chi_A=(t-\alpha)^3$. $\mathrm{rank}(\alpha E-A)$

$$=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-\alpha&0&0\end{pmatrix}=\begin{cases}1, & \alpha\neq0\\0, & \alpha=0\end{cases}$$

$$\dim(V^{\alpha})=\begin{cases}2 & \alpha\neq0\\3 & \alpha=0\end{cases}$$

$\alpha\neq0$ 时 $J_A=\begin{pmatrix}J_1(\alpha)&\\&J_2(\alpha)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&\alpha&1\\0&0&\alpha\end{pmatrix}$

$\alpha=0$ $\quad J_A=\begin{pmatrix}J_1(\alpha)&&\\&J_1(\alpha)&\\&&J_1(\alpha)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&&O\\&\alpha&\\O&&\alpha\end{pmatrix}$. ⑫

例. 设 $S=\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\\vdots&&\vdots\\1&\cdots&1\end{pmatrix}_{n\times n}$ $\quad n>1$

求 J_S

解：$S^2=\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\\vdots&&\vdots\\1&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\\vdots&&\vdots\\1&\cdots&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n&\cdots&n\\\vdots&&\vdots\\n&\cdots&n\end{pmatrix}$

$=nS$

显然 $\mu_S=t^2-nt=(t-n)t$

S 可对角化 (推论8.2)

于是 $\cancel{S\sim J_S}$

$$J_S=\begin{pmatrix}n&&&&O\\&\ddots&&&\\&&n&&\\&&&0&\\O&&&&\ddots\\&&&&&0\end{pmatrix}$$

$\because$ $\mathrm{rank}(S)=1$, $\therefore$ $\mathrm{rank}(J_S)=1$

$$\Longrightarrow J_S=\begin{pmatrix}n&&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}J_1(n)&&&O\\&J_1(0)&&\\&&\ddots&\\O&&&J_1(0)\end{pmatrix}$$

§13 初等因子组

重集（multiset）— 集合中允许出现相同元素.

例 $\{a, a, b\} \neq \{a, b\}$（作为重集）

a 重数 2　　a 重数是 1

例 $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

120 素因子的重集是 $\{2, 2, 2, 3, 5\}$

定义：设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 且

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_l \quad (*)$$

是 V 的一个 $\mathcal{A}$-不可分子空间的直和分解

设 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{V_i}$，$i = 1, 2, \ldots, l$

则重集 $\{\mu_{\mathcal{A}_1}, \ldots, \mu_{\mathcal{A}_l}\}$ 称为 $\mathcal{A}$ 关于 $(*)$ 的初等因子组

类似地，设 $A \in M_n(F)$，把 A 看成 F^n 上线性算子，也可定义 A 关于某个直和分解的初等因子组

例：设 $\varepsilon: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 恒同映射

$\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的基.

$$V = \langle \vec{e}_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \vec{e}_n \rangle \quad (*)$$

ε 关于 $(*)$ 的初等因子组是

$$\{\underbrace{t-1, \ldots, t-1}_{n}\}$$

我们将证明

(i) 初等因子组只与 $\mathcal{A}$ 有关

(ii) 初等因子组"唯一"确定 Jordan "标准型"

(iii) 初等因子组的计算只依赖于 $\chi_{\mathcal{A}}$ 或 $\mu_{\mathcal{A}}$ 在 $F[t]$ 中的不可约分解和若干矩阵乘法运算

引理 13.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 且 $V = F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$

$\mu_{\mathcal{A}, \vec{v}} = pg$，其中 $p, g \in F[t] \setminus F$，首一

令 $\vec{w} = g(\mathcal{A}) \vec{v}$

则 $\mu_{\mathcal{A}, \vec{w}} = p$.

证: $p(\mathcal{A})(\vec{w}) = p(\mathcal{A})\circ g(\mathcal{A})(\vec{v}) = (pg)(\mathcal{A})(\vec{v})$

$= \mu_{\mathcal{A},\vec{v}}(\mathcal{A})(\vec{v}) = \vec{0}$

$\Rightarrow \mu_{\mathcal{A},\vec{w}} \mid p$ (命题7.2.(ii))

$\vec{0} = \mu_{\mathcal{A},\vec{w}}(\mathcal{A})(\vec{w}) = \mu_{\mathcal{A},\vec{w}}(\mathcal{A})\circ g(\mathcal{A})(\vec{v})$

$= (\mu_{\mathcal{A},\vec{w}}\, g)(\mathcal{A})(\vec{v})$

$\Rightarrow \mu_{\mathcal{A},\vec{v}} \mid \mu_{\mathcal{A},\vec{w}}\, g$ (命题7.2(ii))

$\Rightarrow pg \mid \mu_{\mathcal{A},\vec{w}}\, g \Rightarrow p \mid \mu_{\mathcal{A},\vec{w}}$

于是 $\mu_{\mathcal{A},\vec{w}} = p$ ▨

引理13.2 设 $\mathcal{A}\in \mathcal{L}(V)$, $V = F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$

设 $\mu_{\mathcal{A}} = p^m$, 其中 $p\in F[x]$

则
$$\operatorname{rank}(p(\mathcal{A})^k) = \begin{cases} (m-k)(\deg p), & 0\le k < m \\ 0, & k\ge m \end{cases}$$

证: $\forall \vec{x}\in V$, $\exists f\in F[x]$ 使得

$\vec{x} = f(\mathcal{A})(\vec{v})$ (命题7.1(ii))

$p^k(\mathcal{A})(\vec{x}) = p^k(\mathcal{A})f(\mathcal{A})(\vec{v}) = f(\mathcal{A})\underbrace{p^k(\mathcal{A})(\vec{v})}_{\vec{w}_k}$

于是 $p(\mathcal{A})^k(\vec{x}) = f(\mathcal{A})(\vec{w}_k)$

由此可知: $\operatorname{im}(p(\mathcal{A})^k) = F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w}_k$

特别地: $\operatorname{rank}(p(\mathcal{A})^k) = \dim F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w}_k$

当 $k\ge m$. $p^k(\mathcal{A}) = \mathcal{O} \Rightarrow \vec{w}_k = \vec{0}$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(p(\mathcal{A})^k) = 0$

当 $k<m$

$\operatorname{rank}(p(\mathcal{A})^k) = \dim F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w}_k$ 命题7.2(iii) [~~引理10.1~~]

$= \deg \mu_{\mathcal{A},\vec{w}_k}$

$= \deg p^{m-k}$ [引理13.1]

$= (m-k)\deg p$ ▨