①

<u>回忆</u>: 引理 13.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $V$ 是 $\mathcal{A}$-循环的

设 $\mu_{\mathcal{A}} = p^m$, 其中 $p \in F[t]$. 则

$$\operatorname{rank}(p(\mathcal{A})^k) = \begin{cases} (m-k)(\deg p), & 0 \le k < m \\ 0 & k > m \end{cases}$$

引理 13.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $f \in F[t]$

如果 $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_\ell$, 其中 $U_1, \cdots, U_\ell$ 是 $\mathcal{A}$-不变的

则 $f(\mathcal{A})(V) = f(\mathcal{A})(U_1) \oplus \cdots \oplus f(\mathcal{A})(U_\ell)$

证: 设 $W = f(\mathcal{A})(U_1) + \cdots + f(\mathcal{A})(U_\ell)$

$\because$ $U_i \subset V$ $\therefore$ $f(\mathcal{A})(U_i) \subset f(\mathcal{A})(V)$

于是 $W \subset f(\mathcal{A})(V)$

反之 设 $\vec{v} \in V$. 则存在 $\vec{u}_1 \in U_1, \cdots, u_\ell \in U_\ell$

使得 $\vec{v} = \vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_\ell$

于是 $f(\mathcal{A})(\vec{v}) = \underset{\substack{\cap \\ f(\mathcal{A})(U_1)}}{f(\mathcal{A})(\vec{u}_1)} + \cdots + \underset{\substack{\cap \\ f(\mathcal{A})(U_\ell)}}{f(\mathcal{A})(\vec{u}_\ell)}$

$\Rightarrow$ $f(\mathcal{A})(\vec{v}) \in W$

$\Rightarrow$ $f(\mathcal{A})(V) \subset W$

$\Rightarrow$ $f(\mathcal{A})(V) = W$

下面证: $f(\mathcal{A})(U_1) + \cdots + f(\mathcal{A})(U_\ell)$ 是直和: $\because$ $U_i$ 是 $\mathcal{A}$-不变的

$\therefore$ $f(\mathcal{A})(U_i) \subset U_i$

$\because$ $U_1 + \cdots + U_\ell$ 是直和

$\therefore$ $f(\mathcal{A})(U_1) + \cdots + f(\mathcal{A})(U_\ell)$ 也是直和. □

定理13.1 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，$\mu_{\mathcal{A}}=p^m$

其中 $p\in F[t]\setminus F$ 不可约，对 $\forall \ell\in\mathbb{Z}^+$

令 $n_\ell$ 为 $p^\ell$ 在 $\mathcal{A}$ 关于某个 $V$ 的 $\mathcal{A}$-不可分子空间的初等因子组中的重数，再令

$$r_\ell=\operatorname{rank}(p(\mathcal{A})^\ell),$$ 其中 $\ell\in\mathbb{N}$

则 $\forall \ell\in\mathbb{Z}^+$

$$n_\ell=\frac{1}{d}(r_{\ell+1}+r_{\ell-1}-2r_\ell) \quad (*)$$

证：设 $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_k$，

其中 $V_i$ 是 $\mathcal{A}$-不可分的。

令 $\mathcal{A}_i=\mathcal{A}|_{V_i}$，$i=1,2,\dots k$

$$\mu_i=\mu_{\mathcal{A}_i}$$

$\because$ $p$ 不可约 $\therefore$ $\mu_i=p^{m_i}$，其中

$$1\leqslant m_i\leqslant m.$$

由引理10.1，$\dim V_i=m_i d$

$n_\ell$ 是 $V_1,\dots,V_k$ 中维数为 $\ell d$ 的子空间的维数。

令 $S_\ell=\{U\in\{V_1,\dots V_k\}\mid \dim U=\ell d\}$.

则 $n_\ell=\operatorname{card}(S_\ell)$.

由 $V=\bigoplus\limits_{i=1}^{k}V_i=\bigoplus\limits_{j=1}^{m}\left[\bigoplus\limits_{U\in S_j}U\right]$

由引理13.3

$$p(\mathcal{A})^\ell(V)=\bigoplus_{j=1}^{m}\left[\bigoplus_{U\in S_j}p(\mathcal{A})^\ell(U)\right]$$

由第一章推论7.4

$$\dim(p(\mathcal{A})^\ell(V))=\sum_{j=1}^{n}n_j\dim(p(\mathcal{A})^\ell(U)),\quad U\in S_j$$

$$=\sum_{j=1}^{m}n_j\dim(p(\mathcal{A}_U)^\ell(U))$$

于是

$$r_\ell=\operatorname{rank}(p(\mathcal{A})^\ell)=\sum_{j=1}^{m}n_j\operatorname{rank}(p(\mathcal{A}_U)^\ell)$$

由引理13.2 $\operatorname{rank}(p(\mathcal{A}|_U)^l) = \begin{cases} (j-l)d, & 0 \le l < j \\ 0 & l \ge j \end{cases}$

于是 $\forall l \in \mathbb{N}$, $r_l = \sum\limits_{j=l+1}^{m} n_j (j-l) d = d\left[\sum\limits_{j=l+1}^{m} n_j (j-l)\right]$

当 $l \in \mathbb{Z}^+$

$$r_{l-1} - r_l = d\left[\sum_{j=l}^{m} n_j (j-l+1) - \sum_{j=l+1}^{m} n_j (j-l)\right]$$

$$= d\left[n_l + \sum_{j=l+1}^{m} n_j\right]$$

$$r_l - r_{l+1} = d\left[\sum_{j=l+1}^{m} n_j (j-l) - \sum_{j=l+2}^{m} n_j (j-l-1)\right]$$

$$= d\left[n_{l+1} + \sum_{j=l+2}^{m} n_j\right]$$

$$(r_{l-1} - r_l) - (r_l - r_{l+1}) = d n_l \quad \blacksquare$$

$$\Rightarrow n_l = \frac{1}{d}(r_{l-1} + r_{l+1} - 2r_l)$$

注：$n_l$ 与分解 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ (*) 无关.

定理 13.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mu_{\mathcal{A}}$ 的两两不同且首一的不可约因子是

$p_1, p_2, \ldots, p_s \in F[t]$

设 $N(i,l)$ 是 $p_i^l$ 在某个初等因子组中出现的次数. 则

$$N(i,l) = \frac{1}{d_i}\left(R(i,l-1) + R(i,l+1) - 2R(i,l)\right)$$

其中 $d_i = \deg p_i$, $R(i,j) = \operatorname{rank}(p_i(\mathcal{A})^j)$.

$i \in \{1, \ldots, s\}$, $l \in \mathbb{Z}^+$, $j \in \mathbb{N}$.

证：不妨验证 $i=1$ 的情形.

设 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$

其中 $V_1, \ldots, V_k$ 是 $\mathcal{A}$-不可分的

~~$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{V_i}$, $\mu_i$ 是 $\mathcal{A}_i$ 的极小多项式~~

~~$i=1,2,\ldots,k$.~~

设 $S_1=\{U\in\{V_1,\cdots,V_k\} \mid A_U$ 的极小多项式是 $p_1$ 的幂次 $\}$

令 $W_1=\bigoplus_{U\in S} U$. 设 $\tilde{S}=\{V_1,\cdots,V_k\}\setminus S$

$$\tilde{W}=\bigoplus_{\tilde{U}\in\tilde{S}}\tilde{U}.$$

则 $V=W\oplus\tilde{W}$.

断言1 设 $r_l=\mathrm{rank}(p_1^l(A_W))$, $l\in\mathbb{N}$

则 $\forall\, l\in\mathbb{Z}^+$

$$N(1,l)=\frac{1}{d_1}(r_{l-1}+r_{l+1}-2r_l)$$

断言1的证明 $W=\bigoplus_{U\in S}U$ 是 $A_W$ 不可分子空间直和分解. 且 $\mu_{A_U}$ 是 $p_1$ 的某个幂次. 而在 $\tilde{W}=\bigoplus_{\tilde{U}\in\tilde{S}}\tilde{U}$ 中 $\mu_{A_{\tilde{U}}}$ 都不是 $p_1$ 的幂次.

于是 $N(1,l)$ 是 $A_W$ 在 $W=\bigoplus_{U\in S}U$ 的初等因子组中 $p_1^l$ 的重数.

由定理13.1

$N(1,l)=\frac{1}{d_1}(r_{l-1}+r_{l+1}-2r_l)$. 断言1成立

断言2 $p_1(A)_{\tilde{W}}$ 可逆.

断言2的证明 设 $\mu_W$ 是 $A_W$ 的极小多项式. 则 $\mu_{\tilde{W}}$ 是 $A_{\tilde{W}}$ 的极小多项式. 则 $\mu_W$ 是 $p_1$ 的幂次, $\mu_{\tilde{W}}$ 是 $p_2,\cdots p_s$ 的幂次之积. 于是. 由定理4.1 和引理8.1

$$\mu_A=\mu_W\mu_{\tilde{W}} \text{ 且 } \gcd(\mu_W,\mu_{\tilde{W}})=1$$

由定理8.1 $\Rightarrow$ $\mu_W(A)$ 在 $\tilde{W}$ 可逆

$\Rightarrow$ $p_1(A)$ 在 $\tilde{W}$ 上可逆. 断言2成立

断言3 $\forall \ell \in \mathbb{N}$

$$R(1,\ell) = r_\ell + \dim \widetilde{W}$$

<u>断言3的证明</u>

$$R(1,\ell) = \dim(p_1(\mathcal{A})^\ell(V))$$
$$= \dim\left(p_1(\mathcal{A})^\ell(W) \oplus p_1(\mathcal{A})^\ell(\widetilde{W})\right)$$

[引理13.1]

$$= \dim[p_1(\mathcal{A})_W^\ell(W)] \oplus \dim[p_1(\mathcal{A})_{\widetilde{W}}^\ell(\widetilde{W})]$$

$$= r_\ell + \dim \widetilde{W}$$ [断言2]

[断言3成立]

$\cancel{N(1,\ell) = \frac{1}{d_1}}$

$$N(1,\ell) = \frac{1}{d_1}(r_{\ell-1} + r_{\ell+1} - 2r_\ell)$$ [断言1]

$$= \frac{1}{d_1}[R(1,\ell-1) - \dim\widetilde{W} + R(1,\ell+1) - \dim\widetilde{W} - 2R(1,\ell) - 2\dim\widetilde{W}]$$

[断言3]

$$= \frac{1}{d_1}[R(1,\ell-1) + R(1,\ell+1) - 2R(1,\ell)].$$ ☒



注：由证明过程可知 $N(i,\ell)$ 与直和分解 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ 无关

定理13.3 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$. 则在不计 Jordan 块顺序的前提下，$J_A$ 由 $A$ 的初等因子组唯一确定.

证：设 $\mathcal{A}: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$
$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A\vec{x}$

设 $\mathcal{A}$ 的初等因子组为 $\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_\ell\}$
其中 $\mu_i = (t-\alpha_i)^{m_i}$，$\alpha_i \in \mathbb{C}$，$m_i \in \mathbb{Z}^+$.
$\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell$ 不必两两不同. 则
则 $\exists\, V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_\ell$，其中 $V_i$ 是 $\mathcal{A}$-不可分解
且 $\mathcal{A}|_{V_i}$ 的极小多项式是 $\mu_i$，$i=1,\cdots,\ell$.
由定理12.1

$$J_A = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\alpha_1) & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & J_{m_\ell}(\alpha_\ell) \end{pmatrix}.$$ ☒

注：当 $\mu_A = (t-\lambda_1)^{m_1} \cdots (t-\lambda_s)^{m_s}$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 两两不同，$m_1, \cdots m_s \in \mathbb{Z}^+$

令 $p_1 = t-\lambda_1, \cdots p_s = t-\lambda_s$)

$N(i, l)$ 代表在 ~~A~~ 的 $J_A$ 中以 $\lambda_i$ 为特征根. $l$ 为阶的 Jordan 块

$J_l(\lambda_i)$

出现的次数. 更方便地把该数记为

$N(\lambda_i, l)$. $i = 1, 2, \ldots s$. $l \in \mathbb{Z}^+$

例：$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$，$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

求 $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{pmatrix}$ 的Jordan 标准型.

解：$\chi_A = \chi_{A_1} \chi_{A_3} = (t+1)^2 (t-1)^2$ ⑥

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$

注1 利用代数重数几何重数

$\lambda_1$ 代数重数是 2

$\operatorname{rank}(\lambda_1 E - A) = 3 \Rightarrow \dim V^{\lambda_1} = 1$ 即 $\lambda_1$ 的几何重数是1

$\lambda_2$ 代数重数是 2

$\operatorname{rank}(\lambda_2 E - A) = 3 \Rightarrow \lambda_2$ 几何重数是 1

⇒ 关于 $\lambda_2$ 的 Jordan 块只有一块. 该块的阶是2

$J_A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \\ & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

注2. 利用定理 13.2.

$R(\lambda_1, 0) = 4$，$R(\lambda_1, 1) = \operatorname{rank}(p_1(A)) =$

$= \operatorname{rank}(\cancel{\lambda A} - \lambda_1 E) = 3$

$R(\lambda_1, 2) = \operatorname{rank}((A - \lambda_1 E)^2)$

$= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} (A_1 - \lambda_1 E)^2 & * \\ O & (A_3 - \lambda_1 E)^2 \end{pmatrix} = 2$

$N(\lambda_1, 1) = 4 + 2 - 2 \times 3 = 0$,

$R(\lambda_2, 3) = \mathrm{rank}((A-\lambda_1 E)^3) = 2$

$N(\lambda_2, 2) = R(\lambda_1, 1) + R(\lambda_1, 3) - 2R(\lambda_1, 2)$

$= 3 + 2 - 2\times 2 = 1$

同理 $N(\lambda_2, 1) = 0 \Rightarrow N(\lambda_2, 2) = 1$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} J_2(-1) & O \\ O & J_2(1) \end{pmatrix}.$$

例：设 $A \in M_5(\mathbb{C})$ 满足

$\mathrm{rank}(A) = 3$, $\mathrm{rank}(A^2) = 2$, $\mathrm{rank}(A+E) = 4$

$\mathrm{rank}((A+E)^2) = 3$. 求 $J_A$

解：$\mathrm{rank}(A) < 5 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \in \mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A)$

$\mathrm{rank}(A+E) < 5 \Rightarrow \lambda_2 = -1 \in \mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A)$

$N(\lambda_1, 1) = 5 + 2 - 2\times 3 = 1$

$N(\lambda_2, 1) = 5 + 3 - 2\times 4 = 0$

于是 $J_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \alpha_1 & \cdot & * & \\ & & \alpha_2 & & \\ & & & \alpha_3 & \\ & & & & \alpha_4 \end{pmatrix}$

$\mathrm{rank}(A) = 3 \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 中至少有一个是 0

~~如果有~~ 3个是零 $\Rightarrow N(\lambda_2, 1) \neq 0 \rightarrow \leftarrow$

于是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 中恰~~好~~有两个是零.

$\Rightarrow N(\lambda_2, 2) = 1$

$$J_A = \begin{pmatrix} J_1(0) & & \\ & J_2(0) & \\ & & J_2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## §14. F上方阵的相似

定理14.1 设 $A, B \in M_n(F)$ 则

$A \sim_s B \Leftrightarrow$ (i) $\mu_A = \mu_B$ 或 $\chi_A = \chi_B$

(ii) $\forall$ $\mu_A$ 或 $\chi_A$ 的不可约因子 $p$

$\mathrm{rank}(p(A)^i) = \mathrm{rank}(p(B)^i)$

$i = 0, 1, 2, \cdots, n+1.$

证："⇒" $A \sim_s B \Rightarrow \mu_A = \mu_B$（定理2.2）

且 $\chi_A = \chi_B$（命题4.2）

设 $A = P^{-1}BP$，$P \in GL_n(F)$。则 $\forall f \in F[t]$

$f(A) = P^{-1}f(B)P \Rightarrow \operatorname{rank}(f(A)) = \operatorname{rank}(f(B))$

"⇐" 设 $\mu_A = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$ 是 $F[t]$ 中的不可约因式分解，则 $\mu_B$ 有同样的因式分解

且 $\forall i \in \{0, 1, \cdots n+1\}$，$j \in \{1, \cdots, k\}$

$\operatorname{rank}(p_j(A)^i) = \operatorname{rank}(p_j(B)^i)$

由定理13.2 $A, B$ 有相同的初等因子组

设 $\mathcal{A}: F^n \longrightarrow F^n$，$\mathcal{B}: F^n \to F^n$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A\vec{x}$　　$\vec{x} \mapsto B\vec{x}$

则 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 有相同的初等因子组　⑧

于是：$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_l = W_1 \oplus \cdots \oplus W_l$

其中 $U_i$ 是 $\mathcal{A}$-不可分的，$W_i$ 是 $\mathcal{B}$-不可分的。

$i = 1, 2, \cdots, l$。且

$\mathcal{A}|_{U_i}$ 和 $\mathcal{B}|_{W_i}$ 上有相同的极小多项式

设其为 $\mu_i = t^{d_i} + \alpha_{i,d_i-1} t^{d_i-1} + \cdots + \alpha_{i,0}$，$\alpha_{ij} \in F$

$\because$ $U_i$ 是 $\mathcal{A}$-循环的

由定理7.1. $U_i$ 中有一组基

$\vec{e}_{i1}, \cdots, \vec{e}_{id_i}$

使得 $\mathcal{A}|_{U_i}$ 在该基下的矩阵是

$$C_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{i,0} \\ 1 & 0 & & 0 & -\alpha_{i,1} \\ 0 & 1 & & 0 & -\alpha_{i,2} \\ 0 & 0 & & 0 & -\alpha_{i,3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & -\alpha_{i,d_i-2} \\ 0 & 0 & & 1 & -\alpha_{i,d_i-1} \end{pmatrix}_{d_i \times d_i}$$

对于子空在 $V$ 的基底
$\vec{e}_{11}, \dots, \vec{e}_{1d_1}, \dots, \vec{e}_{k1} \cdots \vec{e}_{k,d_k}$

下的矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_k \end{pmatrix}$$

因为 $B$ 与 $A$ 有同样的初等因子组，
所以 $B$ 在 $V$ 的某组基下的矩阵也是 $C$

$$A \sim_s C \sim B \Rightarrow A \sim B \ \square$$

例 设 $A \in M_n(F)$，证明 $A \sim_s A^t$

证：由 $(A^k)^t = (A^t)^k$ 可知

$\forall f \in F[t]$. $f(A)^t = f(A^t)$.

$\Rightarrow \mu_A = \mu_{A^t}$ 且 $\operatorname{rank}(f(A)) = \operatorname{rank}(f(A^t))$

$\Rightarrow A \sim_s A^t$ （定理 14.1）

例：设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ 满足，$n > 1$

$AB - BA = A$

证明 $A$ 是幂零的

证：先设 $A = J_n(\lambda)$. 则 $A = \lambda E + J_n(0)$

由题设可知

$(\lambda E + J_n(0))B - B(\lambda E + J_n(0)) = \lambda E + J_n(0)$

$J_n(0)B - BJ_n(0) = \lambda E + J_n(0)$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{B}_2 \\ \vdots \\ \vec{B}_n \\ \vec{0}_{1\times n} \end{pmatrix} - (\vec{0}_{n\times 1}, \vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(n-1)})}_{C} = \lambda E + J_n(0)$$

设 $B = (b_{ij})_{n\times n}$，$C = (c_{ij})_{n\times n}$

则：$c_{11} = b_{21}$，$c_{22} = b_{32} - b_{21}$，$c_{33} = b_{43} - b_{32}$

$\dots$ $c_{n-1,n-1} = b_{n,n-1} - b_{n-1,n-2}$，$c_{nn} = -b_{n,n-1}$

$\Rightarrow \operatorname{tr}(C) = 0 = n\lambda \Rightarrow \lambda = 0$

$\Rightarrow A$ 幂零

设 $B=(b_{ij})_{n\times n}$，$C=(c_{ij})_{n\times n}$

$c_{11}=b_{21}$，$c_{22}=b_{32}-b_{21}$，$c_{33}=b_{43}-b_{32}$

$\cdots\quad c_{n-1,n-1}=b_{n,n-1}-b_{n-1,n-2}$

$c_{nn}=-b_{n,n-1}$

且 $c_{11}=\cdots=c_{nn}=\lambda$

$n\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow A=J_n(0)$ ✓

再设 $A=\begin{pmatrix} J_{d_1}(\alpha_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_l}(\alpha_l)\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1l} \\ & \ddots & \\ B_{l1} & \cdots & B_{ll}\end{pmatrix}$

$B_{ii}\in M_{d_i}(\mathbb{C})$，$i=1,2,\cdots l$

$AB-BA=A$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} J_{d_1}(\alpha_1)B_{11} & & * \\ & J_{d_2}(\alpha_2)B_{22} & \\ * & \ddots & J_{d_l}B_{ll}\end{pmatrix}$

$-\begin{pmatrix} B_{11}J_{d_1}(\alpha_1) & & * \\ & B_{22}J_{d_2}(\alpha_2) & \\ * & \ddots & B_{ll}J_{d_l}(\alpha_l)\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} J_{d_1}(\alpha_1) & & * \\ & \ddots & \\ * & & J_{d_l}(\alpha_l)\end{pmatrix}$

$\Rightarrow J_{d_i}(\alpha_i)B_{ii}-B_{ii}J_{d_i}(\alpha_i)=J_{d_i}(\alpha_i)$

由前面结论可知：$\alpha_i=0$，$i=1,2\ldots l$

$\Rightarrow$ A 幂零

考虑一般情形

设 $A=P^{-1}J_AP$.

$AB-BA=\cancel{A} \Rightarrow \cancel{P^{-1}APB-BPAP^{-1}}$

$P^{-1}J_APB-BP^{-1}J_AP=P^{-1}J_AP$

$\Rightarrow J_AD-DJ_A=J_A$, 其中 $D=PBP^{-1}$

$\Rightarrow J_A$ 是幂零 $\Rightarrow A$ 幂零. ∎

# 第三章 内积空间

## §1 欧氏空间

### §1.1 内积

设 $V$ 是 $\mathbb{R}$ 上 $n$ 维线性空间

$f(\vec{x},\vec{y})$ 是 $V$ 上对称双线性型

$f(\vec{x},\vec{x})$ 是 $V$ 上正定二次型

则称 $(V,f)$ 是一个欧氏空间,

$f$ 称为 $V$ 上的内积

例 $V=\mathbb{R}^n$. $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}}_{\vec{x}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}}_{\vec{y}}\longmapsto x_1y_1+\cdots+x_ny_n$$

$f(\vec{x},\vec{y})=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$ 对称双线性

$f(\vec{x},\vec{x})=x_1^2+\cdots+x_n^2$ 正定

除号化简

记 $f(\vec{x},\vec{y})$ 为 $\vec{x}\cdot\vec{y}$ 或 $\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle$

双线性性. $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V$

$(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})\cdot\vec{z}=\alpha\vec{x}\cdot\vec{z}+\beta\vec{y}\cdot\vec{z}$

对称性 $\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\vec{x}$

正定: $\vec{x}\cdot\vec{x}>0$ 当 $\vec{x}\neq\vec{0}$

$\vec{x}\cdot\vec{x}=0 \Longleftrightarrow \vec{x}=0$

上例中的欧氏空间称为标准欧氏空间

例：$M_n(\mathbb{R})$，$A\cdot B = tr(AB^t)$

证：$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$

$A\cdot(\alpha B+\beta C) = tr(A(\alpha B+\beta C)^t)$

$= tr(A(\alpha B^t+\beta C^t))$

$= tr(\alpha AB^t + \beta AC^t)$

$= \alpha\, tr(AB^t) + \beta\, tr(AC^t)$

$= \alpha A\cdot B + \beta A\cdot C$

类似 $(\alpha A+\beta B)\cdot C = \alpha A\cdot C + \beta B\cdot C$.

对称 ~~tr~~ $B\cdot A = tr(BA^t) = tr((AB^t)^t)$

$= tr(AB^t) = A\cdot B$

正定. $A\cdot A = tr(AA^t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$

其中 $A = (a_{ij})_{n\times n}$

$\Rightarrow$ 正定

例：设 $\mathbb{R}_n[x]$. $\forall f\cdot g \in \mathbb{R}_n[x]$

$f\cdot g = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$，其中 $a<b$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$，$f, g, h \in \mathbb{R}_n[x]$

$(\alpha f+\beta g)\cdot h = \int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\, h(x)\,dx$

$= \alpha\int_a^b f(x)h(x) + \beta\int_a^b g(x)h(x) = \alpha f\cdot h + \beta g\cdot h$

类似 $f\cdot(\alpha g+\beta h) = \alpha f\cdot g + \beta f\cdot h$.

对称 显然

$f\cdot f = \int_a^b f^2(x)\,dx \Rightarrow f\cdot f \geq 0$ 且 $f\cdot f = 0 \Leftrightarrow f = 0$

注：$\forall \vec{x} \in V$. $\vec{x}\cdot\vec{0} = \vec{0}\cdot\vec{x} = \vec{0}$

验证：$\vec{x}\cdot\vec{0} = \vec{x}\cdot(\vec{0}+\vec{0}) = \vec{x}\cdot\vec{0} + \vec{x}\cdot\vec{0}$

$\Rightarrow \vec{x}\cdot\vec{0} = \vec{0}$

定义：设 $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_s \in V$

$$G(\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_s) := (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j)_{s\times s}$$

称 $G(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_s)$ 是 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_s$ 的 Gram 矩阵

注：$G(\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_s) \in SM_s(\mathbb{R})$.

定理 1.1 设 $V$ 是欧氏空间，$\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_s \in V$

$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ $G(\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_s)$ 满秩

证：~~"⟸" 设~~ $\alpha_1, \cdots \alpha_s \in \mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_s \vec{v}_s = \vec{0}$$

则 $\forall i \in \{1, \cdots s\}$ $\vec{v}_i \cdot (\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_s \vec{v}_s) = \vec{0}$

$\Rightarrow$ $\alpha_1 (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_1) + \cdots + \alpha_s (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_s) = \vec{0}$, $i=1 \cdots s$

即 $$G(\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_s) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

"⟸" 若 $G(\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_s)$ 满秩，则

$\alpha_1 = \cdots = \alpha_s = 0 \Rightarrow \vec{v}_1, \cdots \vec{v}_s$ 线性无关

"⟹" 设 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_s$ 线性无关，$W = \langle \vec{v}_1, \cdots \vec{v}_s \rangle$

则 $(W, \cdot)$ 也是欧氏空间

且 $G(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_s)$ 是 "$\cdot$" 在 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_s$ 下的矩阵

于是 $G(\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_s)$ 正定，$\Rightarrow G(\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_s)$ 满秩。

注：若 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_s \in V$ 线性无关，则

$G(\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_s)$ 正定

§1.2 长度与距离.

定义：设 $\vec{x} \in V$. $\vec{x}$ 的长度（范数）

是 $\sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$ 记为 $|\vec{x}|$ 或 $\|\vec{x}\|$

例：$\mathbb{R}^n$. 标准欧氏空间

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad |\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

例. $M_n(\mathbb{R})$ $\quad A\cdot B = tr(A\cdot B^t)$

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}\ ，其中\ A=(a_{ij})_{n\times n}$$

例: $\mathbb{R}_n[x]$. $\quad \int_a^b f(x)g(x)\,dx$

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}$$

定理 1.2 (Cauchy-Buniakowski 不等式)

设 $\vec{x}, \vec{y} \in V$, 则 $|\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq |\vec{x}|\,|\vec{y}|$

等号成立 $\Leftrightarrow$ $\vec{x}, \vec{y}$ 线性相关

证: 当 $\vec{y}$ 或 $\vec{x}$ 是~~零向量时~~. ~~定理显然成立~~

设 $\vec{y} \neq \vec{0}$. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$(\vec{x}+\lambda\vec{y})\cdot(\vec{x}+\lambda\vec{y})$

$= \vec{x}\cdot\vec{x} + 2\lambda(\vec{x}\cdot\vec{y}) + \lambda^2(\vec{y}\cdot\vec{y}) \geq 0$

即 $|\vec{x}|^2 + 2\lambda(\vec{x}\cdot\vec{y}) + \lambda^2|\vec{y}|^2 \geq 0$

$\Rightarrow 4(\vec{x}\cdot\vec{y})^2 \leq 4|\vec{x}|^2|\vec{y}|^2$

$(\vec{x}\cdot\vec{y})^2 \leq (|\vec{x}|\,|\vec{y}|)^2$

$\Rightarrow |\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq |\vec{x}|\,|\vec{y}|$.

$|\vec{x}\cdot\vec{y}| = |\vec{x}|\,|\vec{y}| \Leftrightarrow \exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$ 满足

$(\vec{x}+\lambda_0\vec{y})\cdot(\vec{x}+\lambda_0\vec{y}) = 0$

$\Leftrightarrow \vec{x}+\lambda_0\vec{y} = 0 \Rightarrow$ ~~$\vec{x}, \vec{y}$~~ $\vec{x}, \vec{y}$ 线性相关

反之 设 $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y} = \vec{0}$. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 不全为零

$\because \vec{y} \neq \vec{0}$ $\quad \therefore \alpha \neq 0$ $\quad$ 令 $\lambda_0 = \frac{\beta}{\alpha}$

则 $\vec{x}+\lambda_0\vec{y} = 0$. 由上述推理可知

$|\vec{x}\cdot\vec{y}| = |\vec{x}|\,|\vec{y}|$ $\quad \boxed{\not\!/}$

注: $|x_1y_1+\cdots+x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}$

$\forall\ x_1,\ldots,x_n,\ y_1,\ldots,y_n \in \mathbb{R}$

$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$

$|tr(AB^t)| \leq \sqrt{tr(AA^t)}\sqrt{tr(BB^t)}$

$\forall f, g \in \mathbb{R}_n[x]$

$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}$