例42: Cauchy-Bunyakovski不等式)

设 $\vec{x},\vec{y}\in V$. 则 $|\vec{x}\cdot\vec{y}|\leqslant|\vec{x}||\vec{y}|$

等号成立 $\Longleftrightarrow$ $\vec{x},\vec{y}$ 线性相关

证: 当 $\vec{y}=\vec{0}$ 时 结论显然成立

设 $\vec{y}\neq\vec{0}$. $\forall\lambda\in\mathbb{R}$

$$(\vec{x}+\lambda\vec{y})\cdot(\vec{x}+\lambda\vec{y})=\vec{x}\cdot\vec{x}+2\lambda\vec{x}\cdot\vec{y}+\lambda^2\vec{y}^2\geqslant 0$$

即 $|\vec{x}|^2+2\lambda(\vec{x}\cdot\vec{y})+\lambda^2|\vec{y}|^2\geqslant 0$

$\because |\vec{y}|\neq 0$ $\therefore$ $\Delta=4(\vec{x}\cdot\vec{y})^2-4|\vec{x}|^2|\vec{y}|^2\leqslant 0$

$$\Longrightarrow |\vec{x}\cdot\vec{y}|\leqslant|\vec{x}||\vec{y}|.$$

$$|\vec{x}\cdot\vec{y}|=|\vec{x}||\vec{y}| \Longleftrightarrow \Delta=0$$

$\Longleftrightarrow$ $\exists\lambda_0\in\mathbb{R}$ 使得

$$(\vec{x}+\lambda_0\vec{y})\cdot(\vec{x}+\lambda_0\vec{y})=0$$

$\Longleftrightarrow$ $\vec{x}+\lambda_0\vec{y}=\vec{0}$

$\Longleftrightarrow$ $\vec{x},\vec{y}$ 线性相关 $(\because\vec{y}\neq\vec{0})$ □

注: 由上述例子可知

① $\forall x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n\in\mathbb{R}$

$$|x_1y_1+\cdots+x_ny_n|\leqslant\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}$$

② $\forall A,B\in M_n(\mathbb{R})$ $|\operatorname{tr}(AB^t)|\leqslant\sqrt{\operatorname{tr}(AA^t)}\sqrt{\operatorname{tr}(BB^t)}$

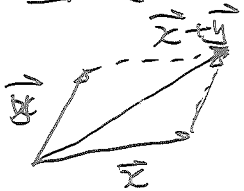
③ $\forall f,g\in\mathbb{R}_n[x]$,

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right|\leqslant\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}$$

推论1.1 (三角不等式). 设 $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V$

则 $|\vec{x}+\vec{y}|\leqslant|\vec{x}|+|\vec{y}|$

且等式成立 $\Longleftrightarrow$ $\vec{x}=\alpha\vec{y}$ 或 $\vec{y}=\alpha\vec{x}$, 其中 $\alpha\geqslant 0$



证: $|\vec{x}+\vec{y}|^2=(\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y})$

$$=\vec{x}\cdot\vec{x}+2(\vec{x}\cdot\vec{y})+\vec{y}\cdot\vec{y}$$

$$=|\vec{x}|^2+2(\vec{x}\cdot\vec{y})+|\vec{y}|^2$$

$$\leqslant|\vec{x}|^2+2|\vec{x}||\vec{y}|+|\vec{y}|^2 \quad (\text{C.-B.不等式})$$

$$=(|\vec{x}|+|\vec{y}|)^2$$

于是 $|\vec{x}+\vec{y}|\leqslant|\vec{x}+\vec{y}|$

"⇐" 不妨设 $\vec{x}=\alpha\vec{y}$，其中 $\alpha\geqslant 0$.

$$\vec{x}+\vec{y}=\alpha\vec{y}+\vec{y}=(\alpha+1)\vec{y}$$

$$|\vec{x}+\vec{y}|=|(\alpha+1)\vec{y}|=(1+\alpha)|\vec{y}|$$

（注：$|\lambda\vec{v}|=\sqrt{(\lambda\vec{v}\cdot\lambda\vec{v})}=\sqrt{\lambda^2(\vec{v}\cdot\vec{v})}$

$=|\lambda||\vec{v}|$）

$$|\vec{x}|+|\vec{y}|=|\alpha\vec{y}|+|\vec{y}|=\alpha|\vec{y}|+|\vec{y}|=(\alpha+1)|\vec{y}|$$

于是 $|\vec{x}+\vec{y}|=|\vec{x}|+|\vec{y}|$

"⇒" 设 $|\vec{x}+\vec{y}|=|\vec{x}|+|\vec{y}|$

由不等式部分的推导可知

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}||\vec{y}|$$

由定理1.2 $\exists\,\alpha\in\mathbb{R}$ 使得

$\vec{x}=\alpha\vec{y}$ 或 $\vec{y}=\alpha\vec{x}$

不妨设 $\vec{x}=\alpha\vec{y}$ 且 $\vec{y}\neq\vec{0}$

$$\alpha|\vec{y}|^2=|\alpha||\vec{y}|^2$$

$$\Rightarrow \alpha=|\alpha|\geqslant 0 \qquad \square$$

定义：设 $\vec{x}\in V$. 如果 $|\vec{x}|=1$，则称 $\vec{x}$ 是单位向量.

注：设 $\vec{x}\in V\setminus\{\vec{0}\}$. 则 $\dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ 是单位向量

验证：$\left|\dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\right|=\sqrt{\dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\cdot\dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|}}=\sqrt{\dfrac{1}{|\vec{x}|^2}\vec{x}\cdot\vec{x}}=\dfrac{1}{|\vec{x}|}|\vec{x}|=1$

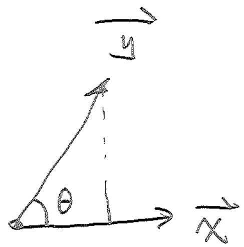
§1.3 夹角与正交

设 $\vec{x},\vec{y}\in V\setminus\{\vec{0}\}$. 由C.-B.不等式可知

$$-1\leqslant\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|}\leqslant 1$$

定义：设 $\vec{x},\vec{y}\in V\setminus\{\vec{0}\}$. $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 的夹角

是 $\theta=\arccos\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}$，其中 $\theta\in[0,2\pi]$



$$\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta$$

当 $\theta=0$ 时 $\vec{x},\vec{y}$ 称为同向的

当 $\theta=\pi$ 时 $\vec{x},\vec{y}$ 称为反向的

注：$\vec{x},\vec{y}$ 同向 $\Leftrightarrow$ $\vec{x}=\alpha\vec{y}$，$\alpha\geq 0$

$\vec{x},\vec{y}$ 反向 $\Leftrightarrow$ $\vec{x}=\beta\vec{y}$ $\beta<0$

验证："$\Rightarrow$" 设 $\vec{x},\vec{y}$ 同向

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}|\,|\vec{y}|$$

由 定理 1.2. $\vec{x}=\alpha\vec{y}$，$\alpha\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \alpha|\vec{y}|^2=|\alpha|\,|\vec{y}|^2 \Rightarrow \alpha=|\alpha|>0$$

"$\Leftarrow$" 设 $\vec{x}=\alpha\vec{y}$，$\alpha>0$

$$\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|\,|\vec{y}|}=\frac{\alpha\,\vec{y}\cdot\vec{y}}{|\alpha|\,|\vec{y}|\,|\vec{y}|}=\frac{\alpha}{|\alpha|}=1\Rightarrow\theta=0$$

定义：设 $\vec{x},\vec{y}\in V$. 如果 $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$

则称 $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 是正交的（垂直的）

记为 $\vec{x}\perp\vec{y}$.

特别地 $\vec{0}$ 和任何向量都正交

即 $\vec{0}$ 是"走向"的.

例（勾股定理）设 $\vec{x},\vec{y}\in V$. $\vec{x}\perp\vec{y}$ ③

证明 $|\vec{x}+\vec{y}|^2=|\vec{x}|^2+|\vec{y}|^2$

证：$|\vec{x}+\vec{y}|^2=(\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y})$

$=\vec{x}\cdot\vec{x}+2(\vec{x}\cdot\vec{y})+\vec{y}\cdot\vec{y}=\vec{x}\cdot\vec{x}+\vec{y}\cdot\vec{y}$

$=|\vec{x}|^2+|\vec{y}|^2$. ☐

命题1.1 设 $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_k\in V\setminus\{\vec{0}\}$. 两两正交

证明 $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_k$ 线性无关

证：$G(\vec{x}_1,\dots\vec{x}_k)=(\vec{x}_i\cdot\vec{x}_j)_{k\times k}$

$$=\begin{pmatrix}\vec{x}_1\cdot\vec{x}_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \vec{x}_k\cdot\vec{x}_k\end{pmatrix}$$

于是 $G(\vec{x}_1,\dots\vec{x}_k)$ 满秩. 由定理1.1

$\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_k$ 线性无关 ☐

§1.4 单位正交基

定义：设 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$ 是 V 的一组基

如果 (i) $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$ 是单位向量

(ii) $\forall\, i,j\in\{1,\cdots,n\}$, $i\neq j$, $\vec{e_i}\perp\vec{e_j}$

则称 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$ 是单位正交基.

换言之. $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$ 是单位正交基

$\Longleftrightarrow$ $\vec{e_i}\cdot\vec{e_j}=\delta_{ij}$, $i,j\in\{1\cdots n\}$.

定理1.2 (Gram-Schmidt 正交化)

有限维欧氏空间 V 存在单位正交基.

证：设 $\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_n}$ 是 V 的一组基

对 $k\in\{1,2,\cdots n\}$ 令

$$W_k=\langle\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_k}\rangle$$

我们对 k 归纳来证明 W_k

有一组单位正交基 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_k}$

$k=1$. 令 $\vec{e_k}=\dfrac{\vec{\varepsilon_1}}{|\vec{\varepsilon_1}|}$. $\because W_1=\langle\vec{\varepsilon_1}\rangle$ 结论成立 ④

设 $1<k\le n$. $W_{k-1}=\langle\vec{e_1},\cdots\vec{e_{k-1}}\rangle$ 的单位正交基

其中 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_{k-1}}$ 是 W_{k-1} 的单位正交基

令 $\vec{e_k'}=\vec{\varepsilon_k}-(\vec{e_1}\cdot\vec{\varepsilon_k})\vec{e_1}-\cdots-(\vec{e_{k-1}}\cdot\vec{\varepsilon_k})\vec{e_{k-1}}$

$\vec{e_k'}\neq\vec{0}$ 否则 $\vec{\varepsilon_k}\in W_{k-1}$ →←

$\forall\, i\in\{1,\cdots k-1\}$

$$\vec{e_k'}\cdot\vec{e_i}=\Big[\vec{\varepsilon_k}-\sum_{j=1}^{k-1}(\vec{e_j}\cdot\vec{\varepsilon_k})\vec{e_j}\Big]\cdot\vec{e_i}$$

$$=\vec{\varepsilon_k}\cdot\vec{e_i}-\sum_{j=1}^{k-1}(\vec{e_j}\cdot\vec{\varepsilon_k})(\vec{e_j}\cdot\vec{e_i})$$

$$=\vec{\varepsilon_k}\cdot\vec{e_i}-\sum_{j=1}^{k-1}(\vec{e_j}\cdot\vec{\varepsilon_k})\delta_{ji}$$

$$=\vec{\varepsilon_k}\cdot\vec{e_i}-\vec{e_i}\cdot\vec{\varepsilon_k}=0$$

于是 $\vec{e_k'}\perp\vec{e_i}$, $i=1,\cdots k-1$.

$\Longrightarrow$ $\vec{e_k}=\dfrac{\vec{e_k'}}{|\vec{e_k'}|}$ 与 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_{k-1}}$ 都正交

$\because \vec{e}_k' \in W_k \quad \therefore \vec{e}_k \in W_k$

由命题1.1. $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{k-1}, \vec{e}_k$ 线性无关

又 $\because \dim W_k = k-1 \quad \therefore \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{k-1}, \vec{e}_k$ 是

W_k 的一组单位正交基.

令 $k=n$. 定理成立

__命题1.2__ 设 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 是 V 的单位正交基. 则

(i) $\forall \vec{x} \in V$, $\vec{x} = (\vec{x}\cdot\vec{e}_1)\vec{e}_1 + \dots + (\vec{x}\cdot\vec{e}_n)\cdot\vec{e}_n$

(ii) 设 $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$, $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + \dots + y_n\vec{e}_n$

则 $\vec{x}\cdot\vec{y} = x_1y_1 + \dots + x_ny_n = (x_1, \dots, x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

__证:__ (i) 设 $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$

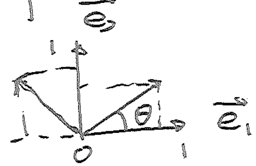
$$\vec{x}\cdot\vec{e}_j = \left(\sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i\right)\cdot\vec{e}_j$$
$$= \sum_{i=1}^n x_i\, \vec{e}_i\cdot\vec{e}_j$$
$$= \sum_{i=1}^n x_i\,\delta_{ij}$$
$$= x_j. \qquad j = 1, 2, \dots n$$

(ii) $$\vec{x}\cdot\vec{y} = \left(\sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^n y_j\vec{e}_j\right)$$
$$= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_j\,\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j \quad (\text{分配律})$$
$$= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_j\,\delta_{ij}$$
$$= \sum_{i=1}^n x_iy_i.$$

例: 在标准欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中. 标准基是单位正交基. 设 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$$

例 标准欧氏空间 $\mathbb{R}^2$ 中



$\vec{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$, $\vec{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

$\vec{\varepsilon}_1\cdot\vec{\varepsilon}_2 = 0$

$|\vec{\varepsilon}_1| = |\vec{\varepsilon}_2| = 1.$

也是单位正交基

例：设 $\mathbb{R}^4$ 是标准欧氏空间

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{u_2} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{u_3} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$U = \langle \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3} \rangle$. 求 U 的一组单位正交基

证：由 Gram-Schmidt 过程

$$\vec{e_1} = \frac{\vec{u_1}}{|\vec{u_1}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{u_1}$$

$$\vec{e_2}' = \vec{u_2} - (\vec{e_1}\cdot\vec{u_2})\vec{e_1} = \vec{u_2} - \frac{1}{2}(\vec{u_1}\cdot\vec{u_2})\vec{u_1}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{e_2} = \frac{\vec{e_2}'}{|\vec{e_2}'|} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\vec{e_3}' = \vec{u_3} - (\vec{e_1}\cdot\vec{u_3})\cdot\vec{e_1} - (\vec{e_2}\cdot\vec{u_3})\vec{e_2}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{2}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{-4}{10}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{e_3} = \frac{\vec{e_3}'}{|\vec{e_3}'|} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

U 的单位正交基是 $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$

§1.5 正交矩阵

设 $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$; $\vec{\varepsilon_1}, \dots, \vec{\varepsilon_n}$ 是 V 的两组单位正交基.

$$(\vec{\varepsilon_1}, \dots, \vec{\varepsilon_n}) = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})P, \quad P \in GL_n(\mathbb{R})$$

$$\vec{\varepsilon_i} = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})\vec{p^{(i)}}, \quad i = 1, 2, \dots n$$

$$\delta_{ij} = \vec{\varepsilon_i}\cdot\vec{\varepsilon_j} = \left(\vec{p^{(i)}}\right)^t \vec{p^{(j)}} = \vec{p_i^t}\,\vec{p^{(j)}}$$

$$\Rightarrow \quad P^t P = E. \Rightarrow P^t = P^{-1}$$

定义：设 $P \in GL_n(\mathbb{R})$. 如果 $P^t = P^{-1}$. 则称 P 是正交(orthogonal)矩阵

定理 1.3 设 $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$ 是 V 的一组单位正交基. $\vec{\varepsilon_1}, \dots, \vec{\varepsilon_n}$ 是 V 的一组基且

$$(\vec{\varepsilon_1}, \dots, \vec{\varepsilon_n}) = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})P, \quad P \in GL_n(\mathbb{R})$$

则 $\vec{\varepsilon_1}, \dots, \vec{\varepsilon_n}$ 是 V 的单位正交基 $\Longleftrightarrow$ P 是正交的

证："$\Rightarrow$" 已证

"$\Leftarrow$" $\vec{\varepsilon}_i = (\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)\vec{P}^{(i)}$, $i=1\dots n$

$$\vec{\varepsilon}_i\cdot\vec{\varepsilon}_j = \left[(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)\vec{P}^{(i)}\right]\cdot\left[(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)\vec{P}^{(j)}\right]$$

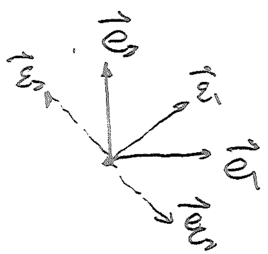
$$=\left(\vec{P}^{(i)}\right)^t\vec{P}^{(j)} = \vec{P}_i^t\,\vec{P}^{(j)} = \delta_{ij}$$

∎

$i,j\in\{1,\dots,n\}$

例：一阶正交阵 $(a)^t(a)=(1) \Leftrightarrow a^2=1 \Leftrightarrow a=\pm1$

例：二阶正交阵



$$(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2) = (\vec{e}_1,\vec{e}_2)\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2) = (\vec{e}_1,\vec{e}_2)\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$\theta\in[0,2\pi)$

例：三阶正交阵. 欧拉角

命题1.3 设 P 是n阶正交矩阵

(i) $|P|=\pm1$

(ii) P^t 即 P^{-1} 也正交

(iii) 再设Q是n阶正交矩阵. 则PQ也正交

证：(i) $P^tP=E \Rightarrow |P^tP|=1 \Rightarrow |P|^2=1$

(ii) $P^tP=E \Rightarrow \cancel{P^tP}\ PP^t=E \Rightarrow (P^t)^tP^t=E$

(iii) $(PQ)^t(PQ)=Q^tP^tPQ=Q^tQ=E$

∎

推论1.2 设 $O_n(\mathbb{R})=\{P\in GL_n(\mathbb{R})\mid P\text{ 正交}\}$

则 $O_n(\mathbb{R})$ 是 $GL_n(\mathbb{R})$ 的子群

证：由上学期讲义14. 引理α.4. (page 3)

只要证：$\forall P, Q\in O_n(\mathbb{R})$.

$PQ^{-1}\in O_n(\mathbb{R})$.

由上述命题(ii)，$Q^{-1}\in O_n(\mathbb{R})$

由命题(iii) $PQ^{-1}\in O_n(\mathbb{R})$ ∎

注：称 $O_n(\mathbb{R})$ 为 $GL_n(\mathbb{R})$ 的正交子群

§1.6 正交相似

设 V 是欧氏空间, $\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$; $\vec{\varepsilon_1},\dots,\vec{\varepsilon_n}$ 是 V 的两组单位正交基. 且

$$(\vec{\varepsilon_1},\dots,\vec{\varepsilon_n}) = (\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})P.$$

则 $P \in O_n(\mathbb{R})$ [定理 1.3]

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ 是 $\mathcal{A}$ 在 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$; $\vec{\varepsilon_1},\dots,\vec{\varepsilon_n}$ 下的矩阵.

由第二章定理2.1 (讲义9. p14)

$$B = P^{-1}AP = P^{t}AP \quad (\because P \text{正交})$$

定义 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. 如果存在 $P \in O_n(\mathbb{R})$ 使得 $B = P^{-1}AP$. 即 $B = P^{t}AP$. 则称 B 正交相似于 A

记为 $B \sim_o A$

命题1.4 $\sim_o$ 是等价关系

证: $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$ $\quad A = EAE$

又 $E \in O_n(\mathbb{R})$. 自反律成立

设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $B \sim_o A$

则 $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$, 使得

$$B = P^{-1}AP \Rightarrow A = PBP^{-1} = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$$

且 $P^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$, 于是 $A \sim_o B$

对称律成立.

再设 $C \in M_n(\mathbb{R})$. 且 $A \sim_o B$, $B \sim_o C$

则 $\exists P, Q \in O_n(\mathbb{R})$, 使得

$$A = P^{-1}BP, \quad B = Q^{-1}CQ$$

$$\Rightarrow A = (QP)^{-1}C(QP) \quad \therefore A \sim_o C. \quad \square$$

$\because QP \in O_n(\mathbb{R})$

注: $A \sim_o B \Rightarrow A \sim_s B$ 且 $A \sim_c B$

但反之不成立.

注 所有的相似不变量都是正交相似不变量. 同时, 正交相似还保持对称和斜对称性

例: 设 $A \in O_n(\mathbb{R})$, $P \in O_n(\mathbb{R})$.

证明: P^tAP 也是正交矩阵

证: $(P^tAP)^t P^tAP = P^tA^tPP^tAP = E$ ∎

例: 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 证明

$A \sim_s \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A \sim_c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 但

$A \not\sim_o \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

证: $\operatorname{rank}(A) = 1$, $\operatorname{rank}(A^2) = 0$. $\lambda = 0$

$N(A, 1) = 0 + 2 - 2 \times 1 = 0$

$\Rightarrow J_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A \underset{s}{\sim} J_A$.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

设 $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

若 $P^tAP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2\cos\theta\sin\theta & 2\cos^2\theta \\ 2\sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \sin\theta = 0 \quad \cos\theta = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow\leftarrow$

同理 不存在 $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ 使得

$P^tAP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ∎

问题: 给定 $A \in M_n(\mathbb{R})$. 求 A 在正交相似下的"标准型"

定义: 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$. 如果 $AA^t = A^tA$ 则称 A 是正规矩阵. 我们将给出正规矩阵的标准型

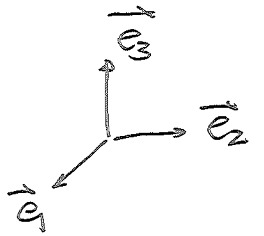
正规矩阵包括, 对称, 斜对称和正交矩阵

§2 正规算子与正规矩阵

§2.1 正交补

定义：设 V 是欧氏空间，$V_1, V_2 \subset V$ 是子空间．如果 $\forall \vec{v_1} \in V_1$，$\vec{v_2} \in V_2$，都有 $\vec{v_1} \perp \vec{v_2}$．则称两子空间 V_1 和 V_2 正交，记为 $V_1 \perp V_2$．

例



$\langle \vec{e_1} \rangle \perp \langle \vec{e_2} \rangle$

$\langle \vec{e_3} \rangle \perp \langle \vec{e_1}, \vec{e_2} \rangle$

例：设 V 的子空间 V_1, V_2 正交．

证明 $V_1 \cap V_2 = \{\vec{0}\}$

证：设 $\vec{u} \in V_1 \cap V_2$．则 $\vec{u} \perp \vec{u}$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}.$$

由此可知：当 $V_1 \perp V_2$ 时，$V_1 + V_2$ 是直和

引理2.1 设 $U = \langle \vec{u_1}, \cdots, \vec{u_k} \rangle$，$W = \langle \vec{w_1}, \cdots, \vec{w_l} \rangle$ 是 V 的两个子空间．则

$$U \perp W \iff \forall i \in \{1, \cdots, k\},\ j \in \{1, \cdots, l\},\ \vec{u_i} \perp \vec{w_j}$$

证："$\Rightarrow$" 显然

"$\Leftarrow$" 设 $\vec{x} = \alpha_1 \vec{u_1} + \cdots + \alpha_k \vec{u_k}$，$\vec{y} = \beta_1 \vec{w_1} + \cdots + \beta_l \vec{w_l}$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{u_i} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{k} \beta_j \vec{w_j} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \beta_j (\vec{u_i} \cdot \vec{w_j}) = 0 \Rightarrow \vec{x} \perp \vec{y} \ \square$$

定义：设 $U \subset V$ 是子空间．令

$$U^{\perp} := \{ \vec{v} \in V \mid \forall \vec{u} \in U,\ \vec{v} \perp \vec{u} \}$$

称 $U^{\perp}$ 为 U 的正交补．

注：$U^{\perp}$ 是子空间且 $U \perp U^{\perp}$

验证：设 $\vec{x}, \vec{y} \in U^{\perp}$，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\forall \vec{u} \in U \quad \vec{u}\cdot(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) = \alpha(\vec{u}\cdot\vec{x})+\beta(\vec{u}\cdot\vec{y})=0$

$\Rightarrow \alpha\vec{x}+\beta\vec{y} \in U^{\perp}$. $\Rightarrow U^{\perp}$是子空间

由$U^{\perp}$的定义可知. $U \perp U^{\perp}$.

命题2.1 设 $\dim V<\infty$ 且 $U\subset V$ 是子空间

则 (i) $V = U \oplus U^{\perp}$

(ii) $(U^{\perp})^{\perp} = U$

证: 设$n=\dim V$. 令 $\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_d$ 是U的一组基. 把它扩充为V的一组基$\vec{\varepsilon}_{d+1}$ $\cdots\vec{\varepsilon}_n$. 由 Gram-Schmidt 正交化过程

V有一组单位正交基

$\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_d,\vec{e}_{d+1},\cdots\vec{e}_n$

满足 $U=\langle\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_d\rangle$. 见

定理1.2的证明

令 $W=\langle\vec{e}_{d+1},\cdots,\vec{e}_n\rangle$

$\because$ ~~$\vec{e}_1,\cdots$~~ $\forall i\in\{1,\cdots d\}$, $j\in\{d+1,\cdots n\}$, $\vec{e}_i\perp\vec{e}_j$

$\therefore U\perp W$ (引理2.1)

$\Rightarrow W\subset U^{\perp}$

$\dim(U+U^{\perp}) = \dim(U\oplus U^{\perp})$ (因$\cap U^{\perp}$=$\{0\}$)

$=\dim U+\dim U^{\perp}$

$\geq \dim U + \dim W = d+n-d = n$

$\Rightarrow V = U+U^{\perp} = U\oplus U^{\perp}$

结论(i)成立. 且 $W=U^{\perp}$.

特别地 $\dim U^{\perp} = n-d$

由此可知 $\dim(U^{\perp})^{\perp} = d$

$\because U\subset(U^{\perp})^{\perp}$ 且 $\dim U = d$

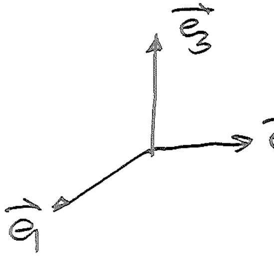
$\therefore U=(U^{\perp})^{\perp}$ $\square$

~~推论2.1~~

例：$\langle \vec{e_1}\rangle$ 设 $\mathbb{R}^3$ 是标准欧氏空间

$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ 是标准正交基.

$$\langle \vec{e_1}\rangle^{\perp} = \langle \vec{e_2}, \vec{e_3}\rangle$$



$$\mathbb{R}^3 = \langle \vec{e_1}\rangle \oplus \langle \vec{e_2}, \vec{e_3}\rangle$$

$$\left(\langle \vec{e_1}\rangle^{\perp}\right)^{\perp} = \langle \vec{e_2}, \vec{e_3}\rangle^{\perp} = \langle \vec{e_1}\rangle$$

例 设 $\mathbb{R}^4$ 是标准欧氏空间

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{u_2} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{u_3} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

求 $U^{\perp}$ 的一组基

证：~~设~~ $\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in U^{\perp} \Leftrightarrow \vec{x}\cdot\vec{u_1} = \vec{x}\cdot\vec{u_2} = \vec{x}\cdot\vec{u_3} = 0$

即 $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow U^{\perp}$ 是

该方程组的解空间，它等于 $\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$

例：设标准欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中的子空间 W 是 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中的解空间. 求 $W^{\perp}$ 的一组单位正交基.

证：方程组为

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$W^{\perp} = \langle (\vec{A_1})^t, (\vec{A_2})^t\rangle = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}}_{\vec{u_1}}, \underbrace{\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}}_{\vec{u_2}} \right\rangle$$

$$\vec{\varepsilon_1} = \frac{\vec{u_1}}{|\vec{u_1}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{\varepsilon_2}' = \vec{u_2} - (\vec{\varepsilon_1}\cdot\vec{u_2})\vec{\varepsilon_1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{4}{3}\\ \frac{5}{3}\end{pmatrix}$$

$$\vec{\varepsilon_2} = \frac{\vec{\varepsilon_2}'}{|\vec{\varepsilon_2}'|} = \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}.$$

§2.2 伴随算子

定义：设 V 是 n 维欧氏空间，$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$

设 $\mathcal{A}^*\in\mathcal{L}(V)$ 使得 $\forall\vec{x},\vec{y}\in V$

$$\mathcal{A}(\vec{x})\cdot\vec{y}=\vec{x}\cdot\mathcal{A}^*(\vec{y})$$

则称 $\mathcal{A}^*$ 是 $\mathcal{A}$ 的伴随算子.

定理 2.1 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$

(i) $\mathcal{A}$ 的伴随算子存在且唯一

(ii) 设 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$ 是 V 的一组单位正交基，则 设 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵是 A

则 $\mathcal{A}^*$ 在该基下的矩阵是 A^t.

证：(i) $\mathcal{A}^*\in\mathcal{L}(V)$ 由公式

$$(\mathcal{A}^*(\vec{e_1}),\dots,\mathcal{A}^*(\vec{e_n}))=(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})A^t$$

确定（第一章定理6.2）. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$

则 $\forall i,j\in\{1,2,\dots,n\}$

$$\mathcal{A}(\vec{e_i})\cdot\vec{e_j}=(a_{1i}\vec{e_1}+\dots+a_{ni}\vec{e_n})\cdot\vec{e_j}=a_{ji}$$

$$\vec{e_i}\cdot\mathcal{A}^*(\vec{e_j})=\vec{e_i}\cdot(a_{j1}\vec{e_1}+\dots+a_{jn}\vec{e_n})=a_{ji}$$

于是 $\mathcal{A}(\vec{e_i})\cdot\vec{e_j}=\cancel{\mathcal{A}^*(\vec{e_j})}\ \vec{e_i}\cdot\mathcal{A}^*(\vec{e_j})$

设 $\vec{x}=x_1\vec{e_1}+\dots+x_n\vec{e_n}$，$\vec{y}=y_1\vec{e_1}+\dots+y_n\vec{e_n}$

$$\mathcal{A}(\vec{x})\cdot\vec{y}=\left(\sum_{i=1}^n x_i\mathcal{A}(\vec{e_i})\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^n y_j\vec{e_j}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^n x_iy_j\left[\mathcal{A}(\vec{e_i})\cdot\vec{e_j}\right]$$

而 $\vec{x}\cdot\mathcal{A}^*(\vec{y})=\left(\sum_{i=1}^n x_i\vec{e_i}\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^n y_j\mathcal{A}^*(\vec{e_j})\right)$

$$=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_j\,\vec{e_i}\cdot\mathcal{A}^*(\vec{e_j})$$

$\Rightarrow\ \mathcal{A}(\vec{x})\cdot\vec{y}=x\cdot\mathcal{A}^*(\vec{y})$

$\Rightarrow\ \mathcal{A}^*$ 是伴随算子 且 $\mathcal{A}^*$ 在 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$ 下的矩阵是 A.

最后来证明唯一性. 设 $B\in\mathscr{L}(V)$

满足 $\forall \vec{x},\vec{y}\in V$

$$\mathscr{A}(\vec{x})\cdot\vec{y}=\vec{x}\cdot B(\vec{y})$$

则 $\vec{x}\cdot\mathscr{A}^*(\vec{y})=\vec{x}\cdot B(\vec{y})$

$$\Rightarrow \vec{x}\cdot[\mathscr{A}^*(\vec{y})-B(\vec{y})]=0$$

$$\Rightarrow \vec{x}\cdot[(\mathscr{A}^*-B)(\vec{y})]=0$$

取 $\vec{x}=(\mathscr{A}^*-B)(\vec{y})$ 得 $[(\mathscr{A}^*-B)(\vec{y})]\cdot[(\mathscr{A}^*-B)(\vec{y})]=0$

$$\Rightarrow (\mathscr{A}^*-B)(\vec{y})=\vec{0}\Rightarrow \mathscr{A}^*(\vec{y})=B(\vec{y})$$

由 $\vec{y}$ 的任意性. $\mathscr{A}^*=B$ ☒

§2.2 正规算子的定义和举例

定义: 设 $\mathscr{A}\in\mathscr{L}(V)$, $\mathscr{A}^*$ 是 $\mathscr{A}$ 的伴随算子. 如果 $\mathscr{A}\circ\mathscr{A}^*=\mathscr{A}^*\circ\mathscr{A}$

则称 $\mathscr{A}$ 是正规算子.

命题2.1 设 $\mathscr{A}\in\mathscr{L}(V)$, $\mathscr{A}$ 在 V 的一组单位正交基下的矩阵是 A. 则

$\mathscr{A}$ 是正规算子 $\Leftrightarrow$ A 是正规矩阵

证: 由定理2.1. $\mathscr{A}$ 的伴随算子 $\mathscr{A}^*$ 在同样基底下的矩阵是 A^t

由第二章定理2.2. (讲义10. page 3)

$$\mathscr{A}\circ\mathscr{A}^*=\mathscr{A}^*\circ\mathscr{A}\Leftrightarrow AA^t=A^tA.$$

定义: 设 $\mathscr{A}\in\mathscr{L}(V)$. 如果 $\mathscr{A}^*=\mathscr{A}$, 则称 $\mathscr{A}$ 是对称算子. 如果 $\mathscr{A}^*=-\mathscr{A}$ 则称 $\mathscr{A}$ 的斜对称算子

注 $\mathscr{A}$ 是(斜)对称 $\Leftrightarrow$ $\mathscr{A}$ 在 V 的单位正交基下的矩阵是(斜)对称的

对称和斜对称算子都是正规的

定义：设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 如果 $\forall \vec{x},\vec{y}\in V$

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})\cdot\mathcal{A}(\vec{y})$$

则称 $\mathcal{A}$ 是保内算子（正交算子）

命题 2.3. 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 则下列命题等价

(i) $\mathcal{A}$ 是~~正交~~保内算子

(ii) $\mathcal{A}$ 在 V 的单位正交基下的矩阵是正交矩阵

(iii) $\forall \vec{x}\in V$, $\|\vec{x}\| = |\mathcal{A}(\vec{x})|$.

证：(i) ⇒ (ii) 设 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 是 V 的单位正交基，$\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵是 A.

$\forall i,j\in\{1,\dots,n\}$,

$$\delta_{ij} = \vec{e}_i\cdot\vec{e}_j \quad (\text{单位正交})$$

$$= \mathcal{A}(\vec{e}_i)\cdot\mathcal{A}(\vec{e}_j) \quad (\text{保内})$$

$$= [(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)\vec{A}^{(i)}]\cdot[(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)\vec{A}^{(j)}]$$

$$= (\vec{A}^{(i)})^t(\vec{A}^{(j)}) = (\vec{A}^t_i)(\vec{A}^{(j)})$$

$$\Rightarrow A^tA = E$$

(ii) ⇒ (iii) 设 $\vec{x} = x_1\vec{e}_1+\dots+x_n\vec{e}_n$

$$\|\vec{x}\|^2 = x_1^2+\dots+x_n^2$$

$$\|\mathcal{A}(\vec{x})\|^2 = \mathcal{A}(\vec{x})\cdot\mathcal{A}(\vec{x})$$

$$= \left[(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right]\cdot\left[(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right]$$

$$= \left[A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right]^t\left(A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right)$$

$$= (x_1\cdots x_n)A^tA\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

$$= (x_1\cdots x_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = x_1^2+\dots+x_n^2 = \|\vec{x}\|^2$$

于是 $\|\vec{x}\| = \|\mathcal{A}(\vec{x})\|^2$

(iii) ⇒ (i) $\forall \vec{x},\vec{y}\in V$

$$(\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y}) = (\mathcal{A}(\vec{x}+\vec{y}))\cdot\mathcal{A}(\vec{x}+\vec{y})$$

$$\|\vec{x}\|^2+2(\vec{x}\cdot\vec{y})+\|\vec{y}\|^2 = \|\mathcal{A}(\vec{x})\|^2+2\mathcal{A}(\vec{x})\cdot\mathcal{A}(\vec{y})+\|\mathcal{A}(\vec{y})\|^2$$

$$\Rightarrow (\vec{x}\cdot\vec{y}) = \mathcal{A}(\vec{x})\cdot\mathcal{A}(\vec{y}) \quad \boxtimes$$

注：的确 $\mathcal{A}$ 可称为正交算子

注：设 $\vec{x},\vec{y}\in V$, $\|\vec{x}-\vec{y}\|$ 称为 $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 之间的距离. 正交算子 $\mathcal{A}$ 保持距离不变.