回忆：命题2.3 设 V 是 n 维欧氏空间

$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，则下列命题等价

(i) $\mathcal{A}$ 是保内算子（正交算子）

(ii) $\mathcal{A}$ 在 V 的单位正交基下的矩阵是正交矩阵

(iii) $\forall \vec{x}\in V \quad \|\vec{x}\| = \|\mathcal{A}(\vec{x})\|$

证：(i) $\Rightarrow$ (ii) 已证

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 设 $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + \cdots + x_n\vec{e_n}$

$$\|\mathcal{A}(\vec{x})\|^2 = \mathcal{A}(\vec{x})\cdot\mathcal{A}(\vec{x})$$

$$= \left[(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right]\cdot\left[(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right]$$

（见讲义 page 7，第2章 推论1.1）

$$= \left(A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right)^t A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

$$= (x_1,\cdots,x_n)A^tA\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

$$= (x_1\cdots x_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \qquad \because (A^tA=E$$

$$= x_1^2+\cdots+x_n^2$$

$$= \|\vec{x}\|^2$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) $\forall \vec{x},\vec{y}\in V$

$$(\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y}) = \mathcal{A}(\vec{x}+\vec{y})\cdot\mathcal{A}(\vec{x}+\vec{y}) \quad (\text{保长})$$

$$= (\mathcal{A}(\vec{x})+\mathcal{A}(\vec{y}))\cdot(\mathcal{A}(\vec{x})+\mathcal{A}(\vec{y}))$$

两边同时展开

$$\|\vec{x}\|^2+2\vec{x}\cdot\vec{y}+\|\vec{y}\|^2 = \|\mathcal{A}(\vec{x})\|^2+2\mathcal{A}(\vec{x})\cdot\mathcal{A}(\vec{y})+\|\mathcal{A}(\vec{y})\|^2$$

~~再由保长得~~ $\vec{x}\cdot\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})\cdot\mathcal{A}(\vec{y})$. ☒

注：从此 保内算子 称为 正交算子

注：因为正交矩阵是正规矩阵，所以正交算子是正规算子

总结：

$$\left.\begin{array}{l}\text{对称算子}\\ \text{斜对称算子}\\ \text{正交算子}\end{array}\right\}\text{在单位正交基下的矩阵}\left\{\begin{array}{l}\text{对称}\\ \text{斜对称}\\ \text{正交}\end{array}\right.$$

§2.3 正规算子(矩阵)的标准型

回忆：第二章命题3.2，

设 W 是 F 上的线性空间，$\mathcal{B}\in\mathcal{L}(W)$

K, L 是 $\mathcal{B}$-子空间且 $W=K\oplus L$

令 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_d$ 是 K 的基，$\vec{e}_{d+1},\cdots,\vec{e}_n$ 基

则 $\mathcal{B}$ 在 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_d,\vec{e}_{d+1},\cdots,\vec{e}_n$ 下的

矩阵是

$$B=\begin{pmatrix} B_K & O \\ O & B_L \end{pmatrix}$$

其中 $B_K\in M_d(F)$，$B_L\in M_{n-d}(F)$

注：该命题逆也成立

验证：设 $K=\langle\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_d\rangle$，$L=\langle\vec{e}_{d+1},\cdots\vec{e}_n\rangle$

则 $W=K\oplus L$

$\forall i\in\{1,\cdots d\}$ $\mathcal{B}(\vec{e}_i)=(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_d,\vec{e}_{d+1},\cdots\vec{e}_n)\vec{B}^{(i)}$

$=(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_d,\vec{e}_{d+1},\cdots\vec{e}_n)\begin{pmatrix}\vec{B}_K^{(i)}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ $\}n-d$

$=(\vec{e}_1,\cdots\vec{e}_d)\vec{B}_K^{(i)}\in K$

$\Rightarrow$ K 是 $\mathcal{B}$-不变的.

类似地：L 是 $\mathcal{B}$-不变的

$\forall M,N\in M_n(F)$ $\quad tr(MN)=tr(NM)$

上学期习题课讲义9. page 6.

引理2.1 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 如果

$tr(AA^t)=0$ 则 $A=O_{m\times n}$

证：$A=(a_{ij})_{m\times n}$. $B=AA^t=(b_{kl})_{m\times m}$

则 $b_{kk}=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}a_{kj}=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}^2$

于是 $tr(B)=\sum_{k=1}^{m}b_{kk}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{kj}^2$

由此可知 $tr(B)=0\Rightarrow a_{kj}=0$, $\begin{matrix}k=1,\cdots m\\ j=1,\cdots n\end{matrix}$

即 $A=O_{m\times n}$ ☒

引理2.2 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 正规.

如果 $A=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ O & A_3\end{pmatrix}$，$A_1\in M_d(\mathbb{R})$

则 $A_2=O_{d\times(n-d)}$

证：由 $A^tA = AA^t$ 得

$$\begin{pmatrix} A_1^t & O \\ A_2^t & A_3^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^t & O \\ A_2^t & A_3^t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_1^tA_1 = A_1A_1^t + A_2A_2^t$$

$$\Rightarrow tr(A_1^tA_1) = tr(A_1A_1^t + A_2A_2^t)$$

$$= tr(A_1A_1^t) + tr(A_2A_2^t)$$

因为 $tr(A_1^tA_1) = tr(A_1A_1^t)$ 所以

$tr(A_2A_2^t) = 0 \Rightarrow A_2 = O_{d\times(n-d)}$ [引理2.2]

引理2.3 设 $A \in \mathcal{L}(V)$ 正规，$U \subset V$ 是 A-子空间

则 (i) $U^\perp$ 也是 A-子空间

(ii) A_U ~~和 A^*_U 都~~是正规算子

证：(i) 设 $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_d}$ 是 U 的一组单位正交基. 因为 $V = U \oplus U^\perp$ (命题2.1)

$U^\perp$ 有单位正交基 $\vec{e_{d+1}}, \dots, \vec{e_n}$ 且

$\vec{e_1}, \dots, \vec{e_d}, \vec{e_{d+1}}, \dots, \vec{e_n}$

是 V 的单位正交基

~~由第二章~~ 因为 U 是 A-不变的

所以. A 在 $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_d}, \vec{e_{d+1}}, \dots, \vec{e_n}$ 下的矩阵 $A = \begin{pmatrix} A_1, & A_2 \\ O & A_3 \end{pmatrix}$，~~其中~~

$A_1 \in M_d(\mathbb{R})$. 且 A 正规.

(命题3.1 第一章) (命题2.2)

由引理2.2. $A_2 = O_{d\times(n-d)}$ 即

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_3 \end{pmatrix}$$

$\because AA^t = A^tA \quad \therefore A_1A_1^t = A_1^tA_1$

$\Rightarrow A_U$ 是正规算子 ($\because A_1$ 是 A_U 在 $\vec{e_1} \dots \vec{e_d}$ 下的矩阵)

由第二章 命题3.2 的逆命题. $U^\perp$ 也是 A-不变的

注：$A^t = \begin{pmatrix} A_1^t & O \\ O & A_3^t \end{pmatrix} \Rightarrow$ ~~都~~ U 和 $U^\perp$

~~都~~是 A^*-不变的

例：设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 正规.

λ 是 $\mathcal{A}$ 的特征根，则 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}^*$ 关于 λ 的特征子空间相等.

证：设 $\vec{v}$ 是 $\mathcal{A}$ 关于 λ 的特征向量

则 $\langle \vec{v} \rangle$ 是 $\mathcal{A}$—不变的，由上论可知

$\langle \vec{v} \rangle$ 也是 $\mathcal{A}^*$—不变的，于是

$\mathcal{A}(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$，$\mathcal{A}^*(\vec{v}) = \alpha \vec{v}$，$\alpha \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{A}(\vec{v}) \cdot \vec{v} = (\lambda \vec{v}) \cdot \vec{v} = \lambda (\vec{v} \cdot \vec{v})$$

$$\parallel$$

$$\vec{v} \cdot \mathcal{A}^*(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \alpha \vec{v} = \alpha (\vec{v} \cdot \vec{v})$$

$$\Rightarrow \lambda (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \alpha (\vec{v} \cdot \vec{v}) \Rightarrow \lambda = \alpha$$

于是 $\vec{v}$ 也是 $\mathcal{A}^*$ 关于 λ 的特征向量

$$V_{\mathcal{A}}^{\lambda} \subset V_{\mathcal{A}^*}^{\lambda}$$

$\because (\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$ $\therefore$ $V_{\mathcal{A}^*}^{\lambda} \subset V_{\mathcal{A}}^{\lambda}$

$\boxtimes$

例：设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 正规，$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$ ④

并且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$. 则 $V^{\lambda_1} \perp V^{\lambda_2}$

证：设 $\vec{v}_1 \in V^{\lambda_1}$，$\vec{v}_2 \in V^{\lambda_2}$

$$\mathcal{A}(\vec{v}_1) \cdot \vec{v}_2 = (\lambda_1 \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_2 = \lambda_1 (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)$$

$$\parallel$$

$$\vec{v}_1 \cdot \mathcal{A}^*(\vec{v}_2) = \vec{v}_1 \cdot (\lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_2 (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)$$

由上例

$$\lambda_1 (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) = \lambda_2 (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \Rightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \quad (\because \lambda_1 \neq \lambda_2)$$

引理 2.4 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 正规，则存在 $\mathcal{A}$—不可分子空间 $U_1, \cdots, U_\ell$ 使得

$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_\ell$ 且 $U_1, \cdots U_\ell$ 两两正交

证：设 $n = \dim V$. 对 n 归纳.

$n = 1$ 显然.

设 $0 < \dim V < n$ 时结论成立.

当 $n = \dim V$ 时，

如果 V 本身是 $\mathcal{A}$—不可分的

则结论成立.

否则 V 有 $\mathcal{A}$-子空间 U 满足

$$0 < \dim U < \dim V$$

由命题2.1 $V = U \oplus U^{\perp}$

由引理2.3 $\mathcal{A}_U$ 和 $\mathcal{A}_{U^{\perp}}$ 都是正规算子. 对 $(U, \mathcal{A}_U;\ \mathcal{A}_{U^{\perp}}, U^{\perp})$

用归纳假设即可 □

引理2.5 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 正规. 如果 V 是 $\mathcal{A}$-不可分的. 则 $\dim V \leq 2$.

证: 先证 P64 定理7. 即

断言: 设 W 是 $\mathbb{R}$ 上线性空间, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(W)$

则 W 有一维或二维 $\mathcal{B}$-不变子空间

断言的证明: 由上学期讲义17 推论1.2 (P.10)

$$\mu_{\mathcal{B}}(t) = p(t)g(t), \text{ 其中 } p, g \in F[t]$$

且 $0 < \deg p \leq 2$. $\Rightarrow \deg g < \deg \mu_{\mathcal{B}}$

$\therefore g(\mathcal{B}) \neq 0$ $\therefore \exists\, \vec{w} \in W$ 使得 $\vec{u} = g(\mathcal{B})(\vec{w}) \neq \vec{0}$

令 $U = F[\mathcal{B}]\cdot\vec{u}$. 则 U 是 $\mathcal{B}$-不变的

且 $p(\mathcal{B})(\vec{u}) = p(\mathcal{B})g(\mathcal{B})(\vec{w}) = \mu_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})(\vec{w}) = \vec{0}$

$\Rightarrow \mu_{\mathcal{B},\vec{u}}(t) \mid p(t)$

$\Rightarrow 0 < \dim U \leq \deg p \leq 2$ (第二章命题7.2)

断言成立.

假设 $\dim V > 2$. 由断言. V 有 $\mathcal{A}$-子空间

U 满足 $1 \leq \dim U \leq 2$.

且 $U^{\perp}$ 也是 $\mathcal{A}$-不变的

$\therefore V = U \oplus U^{\perp}$

(命题2.1 和引理2.3) $\rightarrow\leftarrow$ □

$\therefore V$ 是 $\mathcal{A}$-可分的

例: 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 正规. 且 $\dim V = 1$

$\vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$

$\mathcal{A}(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$

$\mathcal{A}$ 在 $\vec{v}$ 下的矩阵是 (λ)

引理2.6 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 正规，$\dim V=2$ 且 V 是 $\mathcal{A}$-不可分的．设 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交~~解~~基下的矩阵是 A

则 $\exists\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，$\beta\neq 0$ 使得

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}.$$

<u>证</u>　设 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$．因为 A 正规

所以　$A^tA=AA^t \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a^2+c^2=a^2+b^2 & \cdots ①\\ ab+cd=ac+bd & \cdots ②\\ b^2+d^2=c^2+d^2 & \cdots ③\end{cases}$$

由① $\Rightarrow c^2=b^2 \Rightarrow c=b$ 或 $c=-b$.

<u>情形1</u>　$c=b$

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & d\end{pmatrix}\Rightarrow \chi_A=t^2-(a+d)t+ad-b^2$$

$\Delta=(a-d)^2+4b^2\geq 0$

$\Rightarrow A$ 有特征根 $\lambda\in\mathbb{R}$

设 λ 对应的特征向量是 $\vec{v}$

$\langle\vec{v}\rangle$ 是 $\mathcal{A}$-不变．

由引理2.3 ~~和命题2.1~~

$V=\langle\vec{v}\rangle\oplus\langle\vec{v}\rangle^{\perp}$ 是 $\mathcal{A}$-子空间直和分解.

<u>情形2</u> $c=-b\neq 0$．由方程②得

$a-d=d-a \Rightarrow a=d$

~~即~~ 令 $a=\alpha$，$b=-\beta$ 得

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}.$$

直接验证可知

$\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$ 正规

<u>记号</u>　$N(\alpha,\beta):=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$

注意　$\beta\neq 0$.

定理2.1 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 正规

则 存在 V 的一组单位正交基 使得

$\mathcal{A}$ 在 该组基下的矩阵是

$$N_A := \begin{pmatrix} N(\alpha_1,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(\alpha_s,\beta_s) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

证：由引理 2.4 和 2.5 可知

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s \oplus U_{2s+1} \oplus \cdots \oplus U_n$$

其中 $U_1, \cdots, U_s$ 是二维 $\mathcal{A}$ 不可分子空间

$U_{2s+1}, \cdots, U_n$ 是一

且这些子空间两两正交，$\mathcal{A}$ 限制在这些子空间上都是正规 ~~的~~.

$\forall i \in \{1, \cdots s\}$ 设 $\vec{e}_{2i-1}, \vec{e}_{2i}$ 是 U_i 的单位正交基. 由引理 2.6. $\mathcal{A}|_{U_i}$ 在 $\vec{e}_{2i-1}, \vec{e}_{2i}$ 下的矩阵为 $N(\alpha_i, \beta_i)$，其中 α_i, β_i 是某两个实数，$\beta_i \neq 0$. 而 $\forall j \in \{2s+1, \cdots n\}$ 设 $U_j = \langle \vec{e}_j \rangle$ 其中 $\|\vec{e}_j\| = 1$. 则 $\exists \lambda_j \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathcal{A}(\vec{e}_j) = \lambda_j \vec{e}_j$$

由 第三章 定理 3.1 及其证明得 $\mathcal{A}$ 在 V 的单位正交基 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots \vec{e}_{2s-1}, \vec{e}_{2s}, \vec{e}_{2s+1}, \cdots \vec{e}_n$

下的矩阵是 N_A. ☐

7

定理 2.2 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$. 正规 则

$A \sim_o$ 形如定理 2.1 N_A 的矩阵

证：设 $\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ← 标准欧氏空间

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A\vec{x}$

$\because A$ 正规 $\therefore \mathcal{A}$ 正规 (命题 2.2)

$\therefore$ ~~A 正规~~ (定理 2.1 和定理 1.3) ☐

$\Rightarrow A \sim_o N_A$

~~$A \in M_n(\mathbb{R})$ 正规~~

注：设 ~~spec~~ $A \in M_n(\mathbb{R})$

$\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda_1, \cdots \lambda_k\}$

设 m_i 为 λ_i 的代数重数，$i = 1 \cdots k$

$$V^{\lambda_i} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_{i1} \\ \vdots \\ \alpha_{i m_i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha_1 \right.$$

§3. 对称算子(矩阵)的标准型

<u>注释3.1</u> 一阶矩阵都对称

二阶矩阵 $N(\alpha,\beta)$ 不对称 $(\because \beta\neq 0)$

定理3.1 (i) 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 是对称算子，则在 V 的某组单位正交基下 $\mathcal{A}$ 的矩阵是对角阵

(ii) 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 是对称矩阵，则 $A\sim_o \begin{pmatrix}\alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n\end{pmatrix}$，$\alpha_i\in\mathbb{R}$

(iii) 对称算子和对称矩阵的特征根都是实数

证：(i) 由定理2.1，$\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基下的矩阵是 $N_{\mathcal{A}}$，其中二阶块 $N(\alpha,\beta)$ 不可能出现

(ii) 由定理2.2 和 ~~上~~ 述推理直接可得

(iii) 因为 $\mathcal{A}$ 和 A 都可对角化，所以它们的特征根是实数

<u>问题</u>：(i) 给定 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，求 V 的一组单位正交基，使得 $\mathcal{A}$ 在该基下是标准型

(ii) 给定 $A\in SM_n(\mathbb{R})$，求 $P\in O_n(\mathbb{R})$，使得 P^tAP 是对角型

关键事实：由上节的例子可知，若 $\vec{v_1}\in V^{\lambda_1}$，$\vec{v_2}\in V^{\lambda_2}$，其中 $\lambda_1\neq\lambda_2$，则 $\vec{v_1}\perp\vec{v_2}$

(1) 求 $\mathcal{A}$ 的特征根 $\lambda_1,\dots\lambda_m$

(2) ~~在 $V^{\lambda_1},\dots,V^{\lambda_m}$ 中~~ $\forall i\in\{1,\dots m\}$
求 V^{λ_i} 的一组单位正交基 $\vec{e}_{i1},\dots\vec{e}_{id_i}$

(3) 由上述事实 $\vec{e}_{11},\dots,\vec{e}_{1d_1},\dots,\vec{e}_{m,1},\dots,\vec{e}_{m,d_m}$ 是所求的正交基

例：设 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ← 标准欧氏空间
$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\mapsto A\vec{x}$

则 $\mathcal{A}$ 是对称算子，重复(1),(2),(3)

⑧

例 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 求正交矩阵 $P\in O_4(\mathbb{R})$

解 $\chi_A=|tE-A|=(t-1)^3(t+3)$

两个特征根 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-3$

V^{λ_1} 是 $(\lambda_1 E-A)\vec{x}=\vec{0}$ 即 $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A_{\lambda_1}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

的解空间. $\mathrm{rank}(A_{\lambda_1})=1 \Rightarrow \dim V^{\lambda_1}=3$

$$x_1-x_2-x_3+x_4=0$$

$V^{\lambda_1}=\langle \underset{\vec{v_1}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\vec{v_2}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{\vec{v_3}}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \rangle \overset{G.-S.}{=\!=} \langle$

$\vec{e_1}=\dfrac{\vec{v_1}}{|\vec{v_1}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{v_1}$. $\because \vec{v_1}\perp\vec{v_2}$ $\therefore$ $\vec{e_2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{v_2}$

$\cancel{\vec{e_2}'=\vec{v_2}-(\vec{e_1}\cdot\vec{v_2})\vec{e_1}}$

$\vec{e_3}'=\vec{v_3}-(\vec{e_1}\cdot\vec{v_3})\vec{e_1}-(\vec{e_2}\cdot\vec{v_3})\vec{e_2}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{e_3}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

V^{λ_2} 是 $(\lambda_2 E-A)\vec{x}=\vec{0}$ 即 $\underbrace{\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}}_{A_{\lambda_2}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的解空间

$V^{\lambda_2}=\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ $\vec{e_4}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},\vec{e_4})=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$P^tAP=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & \lambda_2 \end{pmatrix}$

例: $\mathbb{R}^2$ 一标准欧氏空间

$\Phi(x_1,x_2)=ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2+dx_1+ex_2+f$

其中 $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$, a,b,c 不全为

答 问 $\Phi(x_1,x_2)=0$ 代表什么图形

$$\varphi(x_1,x_2) = (x_1,x_2)\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix} + (d,e)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix} + f$$

$\exists P\in O_2(\mathbb{R})$, $P^tAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$,

$$\varphi(x_1,x_2) = (x_1,x_2)PP^tAPP^t\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix} + (d,e)\overset{P}{\check{}}P^t\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix} + f$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2\end{pmatrix} = P^t\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}$$

$$(y_1,y_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2\end{pmatrix} + (d,e)P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2\end{pmatrix} + f = 0$$

代表什么图形 即

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + f = 0$$

的轨迹

情形1. $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ $\exists\ h_1, h_2 \in \mathbb{R}$

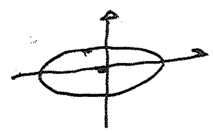
~~$\lambda_1(y_1+\frac{\alpha_1}{\lambda_1}y_1)$~~ 使得 经变换

$y_1 = z_1+h_1$ 后方程变为

$y_2 = z_2+h_2$

$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = h$ $h\in\mathbb{R}$

情形1.1 $\lambda_1>0,\ \lambda_2>0,\ h>0$

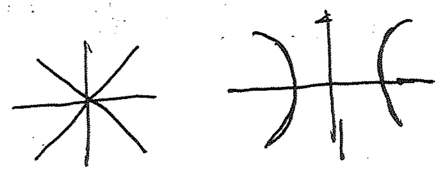


$$\frac{z_1^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{z_2^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2} = h'$$ 椭圆

情形1.2. $\lambda_1>0,\ \lambda_2>0,$ $h\leq 0$. 退化

情形1.3 $\lambda_1>0,\ \lambda_2<0$

$$\frac{z_1^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2} - \frac{z_2^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{-\lambda_2}}\right)^2} = h'$$ 双曲线

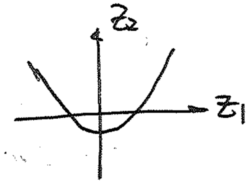


情形2. $\lambda_2 = 0$

$$\lambda_1 y_1^2 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + f = 0$$

通过配方

$\lambda_1 z_1^2 = \mu y_2$



$\mu\neq 0$ 抛物线

$\mu = 0$ 重合直线

定理3.2 设 $A\in SM_n(\mathbb{R})$

则 A正定 $\Longleftrightarrow$ A的特征根都是正实数

证：由定理3.1

$$A \sim_o \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{B} \quad \lambda_i\in\mathbb{R}$$

于是 $A\sim_c B \Rightarrow$ "A正定 $\Longleftrightarrow B$正定"

$\Rightarrow$ "A正定 $\Longleftrightarrow \lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}^+$" ▨

定义：设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 是对称算子，如果

$\forall \vec{x}\in V\setminus\{\vec{0}\}$，$\mathcal{A}(\vec{x})\cdot\vec{x}>0$.

则称 $\mathcal{A}$ 是正定算子.

命题3.1 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，$\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$

是 V的单位正交基，$\mathcal{A}$在该基下矩阵为A

则 $\mathcal{A}$正定 $\Longleftrightarrow$ A正定

证：设 $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+\cdots+x_n\vec{e}_n\neq\vec{0}$

$\mathcal{A}(\vec{x})=(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

因为 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 是单位正交基.

$\mathcal{A}(\vec{x})\cdot\vec{x}=\vec{x}\cdot\mathcal{A}(\vec{x})=(x_1\cdots x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

于是 $\mathcal{A}(\vec{x})\cdot\vec{x}>0$ $\quad(\forall\vec{x}\in V\setminus\{\vec{0}\})$

$\Longleftrightarrow$ A正定. ▨

推论3.1 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，对称.

$\mathcal{A}$正定 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$的特征根为正实数

证：由定理3.2，命题3.1直接可得

定理3.3 设 $A,B\in SM_n(\mathbb{R})$

A正定. 则 $\exists P\in GL_n(\mathbb{R})$. 使得

$P^tAP=E$, $\quad P^tBP$ 是对角阵

证：$\because$ A正定 $\therefore$ $\exists P_1\in GL_n(\mathbb{R})$ 使得

$P_1^tAP_1=E$. $\quad$（第一章定理14.3）

$\therefore$ $P_1^tBP_1$ 对称

$\therefore$ $\exists P_2\in O_n(\mathbb{R})$ 使得

$$P_2^tP_1^tBP_1P_2=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n\end{pmatrix},\quad \alpha_i\in\mathbb{R}$$

令 $P = P_1 P_2$ 则 $P^t B P$ 也是对角阵.

$P^t A P = P_2^t P_1^t A P_1 P_2 = P_2^t P_2 = E$ □

（P_2 正交）

推论3.2 设 V 是 $\mathbb{R}$ 上 n 维空间，p, q 是 V 上的两个二次型 且 p 正定，则存在 V 的一组基，使得在该基下，p, q 同时为规范型.

证：设 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 是 V 的一组基 且 p, q 在该基下的矩阵分别是 A_p 和 A_q.

则 A_p 正定且 A_q 对称.

由定理3.3 $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$，使得 $P^t A_p P$ 和 $P^t A_q P$ 同时为对角矩阵.

于是，p, q 在基底

$$(\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n) = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) P$$

下 同时为规范型 （参考定理10.3）□

例：设 A, B 是两个 n 阶正定矩阵

证明 $\det(A+B) \geq \det(A) + \det(B)$

证：由定理3.3 $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ 使得

$$P^t A P = E, \quad P^t B P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

因为 B 正定 所以 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+$.

$$P^t(A+B)P = P^t A P + P^t B P = \begin{pmatrix} 1+\alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1+\alpha_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det(P^t(A+B)P) = (1+\alpha_1)\cdots(1+\alpha_n)$

$= \det(P)^2 \det(A+B)$

$\Rightarrow \det(A+B) = \dfrac{1}{\det(P)^2}(1+\alpha_1)\cdots(1+\alpha_n)$

$\det(P^t A P) + \det(P^t B P) = 1 + \alpha_1 \cdots \alpha_n$

$= \det^2(P)\left(\det(A) + \det(B)\right)$

$\because (1+\alpha_1)\cdots(1+\alpha_n) \geq 1 + \alpha_1 \cdots \alpha_n$

$\therefore \det(A+B) \geq \det(A) + \det(B)$

□

§4 斜对称算子(矩阵)的标准型

一阶斜对称矩阵 (0)

二阶 $N(\alpha,\beta)$ 斜对称 $\Rightarrow \alpha=0$

定理4.1 (i) 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 是斜对称算子，

则在 V 的一组单位正交基下的矩阵是

$$N_A\quad\begin{pmatrix} N(0,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & N(0,\beta_s) & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 斜对称，

则 $A\sim_o$ 形如 N_A 的矩阵

(iii) $\mathcal{A}$ 和 A 的特征根都是纯虚数 (包括 0).

证：(i) 由定理2.1，$\mathcal{A}$ 在某组单位正交基下的矩阵为 N_A，$\because N_A$ 是斜对称的 所以 $\alpha_1=\cdots=\alpha_s=\lambda_{2s+1}=\cdots=\lambda_n=0$

(ii) 类似

(iii) $\chi_A=(t^2+\beta_1^2)\cdots(t^2+\beta_s^2)t^{n-2s}$

$\Rightarrow \mathcal{A}$ 的特征根的实部都是零 □

例：设 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 斜对称，

证明 $E+A$ 可逆.

证：$\because A$ 斜对称 $\therefore \exists P\in O_n(\mathbb{R})$

使得 $P^tAP=\begin{pmatrix} N(0,\beta_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & N(0,\beta_s) & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0\end{pmatrix}$

$$P^t(E+A)P=E+P^tAP=\underbrace{\begin{pmatrix} N(1,\beta_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & N(1,\beta_s) & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1\end{pmatrix}}_{B}$$

$$\det(B)=\det(N(1,\beta_1))\cdots\det(N(1,\beta_s))=\prod_{i=1}^{s}(1+\beta_i^2)\neq 0$$

$\Rightarrow B$ 可逆 $\Rightarrow E+A$ 可逆 □

§5 正交算子(矩阵)的标准型

一阶正交矩阵 (λ). $\lambda=\pm1$

二阶 $N(\alpha,\beta)$ 是正交阵

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2+\beta^2 & 0\\ 0 & \alpha^2+\beta^2\end{pmatrix}=E_2$$

由此可知 $\alpha=\cos\theta$，$\beta=\sin\theta$，且 $\theta\neq k\pi$，$k\in\mathbb{Z}$

定理5.1 (i) 设 $A\in\mathcal{L}(V)$ 是正交~~算子~~变换，则在 V 的某组正交基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} N(\cos\theta_1,\sin\theta_1) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & N(\cos\theta_s,\sin\theta_s) & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

(ii) 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 是正交的，则 A 正交相似于~~形如~~上面的矩阵

(iii) 正交算子 $\mathcal{A}$ 和正交矩阵的特征根的模长为1.

证：(i) 由定理2.1 $\exists$ V 的一组单位正交基使得在该基下的矩阵是 $N_{\mathcal{A}}$，其中 $N(\alpha_i,\beta_i)$ 是二阶正交阵，$i=1,\dots,s$

λ_j 是一阶正交阵，$j=2s+1,\dots,n$.

由一阶~~和二阶~~正交阵和 $N(\alpha,\beta)$ 正交阵的具体形式可知，结论成立

(ii) 类似

(iii) $\chi_{N(\cos\theta,\sin\theta)}=t^2-2\cos\theta t+1$

$$t=\frac{2\cos\theta\pm\sqrt{4\cos^2\theta-4}}{2}=\cos\theta\pm\sin\theta\sqrt{-1}$$

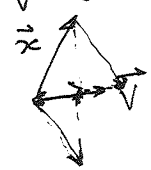
$\square$

例：求 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ 的标准型

$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ $A\sim_o\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

例 设 $n=\dim V$. $\vec{v}\in V$ 是单位向量



$\mathcal{A}: V\to V$

$\vec{x}\mapsto 2(\vec{x}\cdot\vec{v})\vec{v}-\vec{x}$

证明 $\mathcal{A}$ 是正交~~算子~~变换 并求 $\mathcal{A}$ 的特征根

证：$\mathcal{A}(\vec{x})\cdot\mathcal{A}(\vec{x})$

$=\left(2(\vec{x}\cdot\vec{v})\cdot\vec{v}-\vec{x}\right)\cdot\left(2(\vec{x}\cdot\vec{v})\cdot\vec{v}-\vec{x}\right)$

$=4(\vec{x}\cdot\vec{v})^2(\vec{v}\cdot\vec{v})-4(\vec{x}\cdot\vec{v})(\vec{v}\cdot\vec{x})+\vec{x}\cdot\vec{x}$

$=4(\vec{x}\cdot\vec{v})^2(\vec{v}\cdot\vec{v})-4(\vec{x}\cdot\vec{v})^2$，$(\because\ \vec{v}\cdot\vec{v}=1)$

$=\vec{x}\cdot\vec{x}$

设 $\vec{e_1} = \vec{v}$. $\vec{e_2}, \cdots, \vec{e_n}$ 是 $\langle \vec{e_1} \rangle^{\perp}$ 的一组单位正交基. 由命题 2.1, $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_n}$ 是 V 的一组单位正交基

$$A(\vec{e_1}) = \vec{e_1}, \quad A(\vec{e_i}) = -\vec{e_i}, \quad i=2,\dots n$$

于是 A 在 $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_n}$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, -1\}$$

$\blacksquare$