回忆：设 W 是域 F 上有限维线性空间

$\sigma_1, \cdots, \sigma_m \in \mathcal{L}(W)$. ~~如果~~

(i) $\forall i \in \{1, \cdots, m\}$, $\sigma_i^2 = \varepsilon$ (等方)

(ii) $\forall \underbrace{i, j \in \{1, \cdots, m\},}_{i \neq j}$ $\sigma_i \circ \sigma_j = \mathcal{O}$ (正交)

(iii) $\sigma_1 + \cdots + \sigma_m = \varepsilon$ (完全)

则称 $\sigma_1, \cdots, \sigma_m$ 是 W 上的一个完全正交等方组. (假设 $\forall i \in \{1, \cdots, m\}$. $\sigma_i \neq \mathcal{O}$)

例：$W = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$ (*)

其中 $U_1, \cdots U_m$ 是 W 的正维数子空间

令：$\pi_i : W \longrightarrow U_i$

$\vec{x} \longmapsto \vec{x}_i$

($\exists!$ $\vec{x}_1 \in U_1, \cdots \vec{x}_m \in U_m$. 使得

$\vec{x} = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_m$)

则 $\pi_1, \cdots, \pi_m$ 是 W 上的一个完全正交等方组 (见第二章 §2.6)

引理 A：设 $\alpha_1, \cdots \alpha_m \in F$. $\sigma_1, \cdots, \sigma_m$ 是 W 的一个 ~~完全~~ 正交等方组

则 $\forall k \in \mathbb{Z}^+$

$$(\alpha_1 \sigma_1 + \cdots + \alpha_m \sigma_m)^k = \alpha_1^k \sigma_1 + \cdots + \alpha_m^k \sigma_m$$

证：对 k 归纳 $k=1$. ✓

当 $k>1$ 时 设 $k-1$ 时结论成立.

$$(\alpha_1 \sigma_1 + \cdots + \alpha_m \sigma_m)^k$$

$$= (\alpha_1 \sigma_1 + \cdots + \alpha_m \sigma_m)^{k-1} \circ (\alpha_1 \sigma_1 + \cdots + \alpha_m \sigma_m)$$

$$= (\alpha_1^{k-1} \sigma_1 + \cdots + \alpha_m^{k-1} \sigma_m) \circ (\alpha_1 \sigma_1 + \cdots + \alpha_m \sigma_m) \text{ [归纳假设]}$$

$$= \alpha_1^k \sigma_1^2 + \cdots + \alpha_m^k \sigma_m^2 \quad \text{(正交性)}$$

$$= \alpha_1^k \sigma_1 + \cdots + \alpha_m^k \sigma_m \quad \text{(等方性)}$$

引理 B. 设 $\alpha_1, \cdots \alpha_m$, $\sigma_1, \cdots \sigma_m$ 如引理A

$f \in F[t]$

则 $f(\alpha_1 \sigma_1 + \cdots + \alpha_m \sigma_m) = f(\alpha_1) \sigma_1 + \cdots + f(\alpha_m) \sigma_m$.

证： 设 $f=\beta_d x^d+\beta_{d-1}x^{d-1}+\cdots+\beta_0$，其中 $\beta_j\in F$

$$f\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i\sigma_i\right)=\sum_{j=0}^{d}\beta_j\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i\sigma_i\right)^j$$

$$=\sum_{j=0}^{d}\beta_j\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i^j\sigma_i\right) \qquad [\text{引理A}]$$

$$=\sum_{j=0}^{d}\sum_{i=1}^{m}\beta_j\alpha_i^j\sigma_i$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=0}^{d}\beta_j\alpha_i^j\right)\sigma_i$$

$$=\sum_{i=1}^{m} f(\alpha_i)\,\sigma_i. \qquad \square$$

§6 谱分解定理及其应用

定理 6.1 设 W 是域 F 上的有限维线性空间，$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(W)$ 可对角化，则 $\exists!\ \alpha_1,\cdots,\alpha_m\in F$，两两不同，和完全正交等方组 $\sigma_1,\cdots,\sigma_m$ 使得

$$\mathcal{A}=\alpha_1\sigma_1+\cdots+\alpha_m\sigma_m$$

且 $\sigma_1,\cdots,\sigma_m\in F[\mathcal{A}]$.

直观： $\because$ $\mathcal{A}$ 可对角化

$$W=W^{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus W^{\lambda_m}$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 是 $\mathcal{A}$ 所有的特征根，两两不同，W^{λ_i} 是 λ_i 对应的特征子空间，$i=1,2,\cdots,m$

设 $\vec{\varepsilon}_{i1},\cdots,\vec{\varepsilon}_{id_i}$ 是 W^{λ_i} 的一组基

则由直和分解 $\vec{\varepsilon}_{11},\cdots,\vec{\varepsilon}_{1d_1},\ \cdots,\ \vec{\varepsilon}_{m,1},\cdots,\vec{\varepsilon}_{m,d_m}$ 是 W 的基，在该基下 $\mathcal{A}$ 的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1E_{d_1} & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_mE_{d_m}\end{pmatrix}_{n\times n}$$

设 $A_1=\begin{pmatrix}E_{d_1} & & & O\\ & O_{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & O_{d_m}\end{pmatrix}_{n\times n}$ $\cdots$

$$A_m=\begin{pmatrix}O_{d_1} & & & O\\ & \ddots & & \\ & & O_{d_{m-1}} & \\ O & & & E_{d_m}\end{pmatrix}_{n\times n}$$

则 $A=\lambda_1A_1+\cdots+\lambda_mA_m$

且 $A_i^2=A_i$，$A_i\cdot A_j=O$，$i\neq j$，$A_1+\cdots+A_m=E$

定理6.1的证明。

1. 存在性：由第2章定理5.3

$$W = W^{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus W^{\lambda_m} \quad (*)$$

其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$，$W^{\lambda_1}, \ldots, W^{\lambda_m}$ 如上所述。

设 σ_i 是从 W 到 W^{λ_i} 关于 $(*)$ 的投射，$i=1,\ldots,m$

$$\forall \vec{x} \in W, \quad \vec{x} = \underset{W^{\lambda_1}}{\underset{\cap}{\sigma_1(\vec{x})}} + \cdots + \underset{W^{\lambda_m}}{\underset{\cap}{\sigma_m(\vec{x})}}$$

（投影的定义）

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\vec{x}) &= \mathcal{A}(\sigma_1(\vec{x}) + \cdots + \sigma_m(\vec{x})) \\ &= \mathcal{A}(\sigma_1(\vec{x})) + \cdots + \mathcal{A}(\sigma_m(\vec{x})) \\ &= \lambda_1\sigma_1(\vec{x}) + \cdots + \lambda_m\sigma_m(\vec{x}) \\ &= (\lambda_1\sigma_1 + \cdots + \lambda_m\sigma_m)(\vec{x}) \end{aligned}$$

于是 $\mathcal{A} = \lambda_1\sigma_1 + \cdots + \lambda_m\sigma_m$

存在性成立

2. 唯一性 再设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F$ 两两不同

$\tau_1, \ldots, \tau_k$ 是 W 上的一个完全正交

幂等组 使得

$$\mathcal{A} = \alpha_1\tau_1 + \cdots + \alpha_k\tau_k$$

设 $\vec{w} \in \mathrm{im}(\tau_1) \setminus \{\vec{0}\}$. $\exists \vec{v} \in W$ 使得 $\tau_1(\vec{v}) = \vec{w}$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\vec{w}) &= (\alpha_1\tau_1 + \cdots + \alpha_k\tau_k)(\vec{w}) \\ &= \alpha_1\tau_1(\vec{w}) + \alpha_2\tau_2(\vec{w}) + \cdots + \alpha_k\tau_k(\vec{w}) \\ &= \alpha_1\tau_1\circ\tau_1(\vec{v}) + \alpha_2\tau_2\circ\tau_1(\vec{v}) + \cdots + \alpha_k\tau_k\tau_1(\vec{v}) \\ &= \alpha_1\tau_1^2(\vec{v}) \qquad [\text{正交}] \\ &= \alpha_1\tau_1(\vec{v}) \qquad [\text{幂等}] \\ &= \alpha_1\vec{w} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \alpha_1 \in \mathrm{spec}_F(\mathcal{A})$.

不妨设 $\lambda_1 = \alpha_1$. 则 $\mathrm{im}(\tau_1) \subset W^{\lambda_1}$.

类似地，不妨设 $\lambda_i = \alpha_i$，则 $\mathrm{im}(\tau_i) \subset W^{\lambda_i}$

$i = 2, 3, \ldots, k$.

④

$\forall \vec{x} \in W$, $\vec{x} = \mathcal{E}(\vec{x}) = (\tau_1 + \cdots + \tau_m)(\vec{x})$ (完全)

$= \tau_1(\vec{x}) + \cdots + \tau_m(\vec{x})$

$\in \mathrm{im}(\tau_1) + \cdots + \mathrm{im}(\tau_k)$

于是 $V = \underset{W^{\lambda_1}}{\underset{\cap}{\mathrm{im}(\tau_1)}} + \cdots + \underset{W^{\lambda_k}}{\underset{\cap}{\mathrm{im}(\tau_k)}}$

$\Rightarrow V = W^{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus W^{\lambda_k}$

$\Rightarrow m = k$. (*)

设 $\vec{x} = \sigma_1(\vec{x}) + \cdots + \sigma_m(\vec{x})$ [∵ (*)]

$= \tau_1(\vec{x}) + \cdots + \tau_m(\vec{x})$ [∵完全性]

∵ $\forall i \in \{1, \ldots m\}$, $\sigma_i(\vec{x}), \tau_i(\vec{x}) \in W^{\lambda_i}$

由 (*). $\sigma_i(\vec{x}) = \tau_i(\vec{x})$.

唯一性成立.

3. 多项式表示

由本学期第一次习题课. (Lagrange插值)

$\forall i \in \{1, \ldots, m\}$ $\exists f_i \in F[t]$ 使得

$f_i(\lambda_i) = 1$, $f_i(\lambda_j) = 0$, $i \neq j$

事实上

$$f_i(t) = \frac{(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_{i-1})(t-\lambda_{i+1})\cdots(t-\lambda_m)}{(\lambda_i-\lambda_1)\cdots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\cdots(\lambda_i-\lambda_m)}$$

由引理 (B)

$f_i(A) = \sum_{j=1}^{m} f_i(\lambda_j)\sigma_j = f_i(\lambda_i)\sigma_i = \sigma_i$ ▯

~~命题~~6.1 设 A 是 W 上正定~~算子~~. 则 $\exists !$ 正定~~算子~~ B 使得 $A = B^2$ 且 $\exists p \in F[t]$ 使得 $B = p(A)$.

[W 是有限维欧氏空间]

证: 由$\underset{定理3.1, 3.2}{\underbrace{定理6.1}}$ 及~~其中证明~~

$A = \lambda_1\sigma_1 + \cdots + \lambda_m\sigma_m$

其中 $\lambda_1, \ldots \lambda_m \in \underset{两两不同}{\mathbb{R}^+}$, $\sigma_1, \ldots \sigma_m$ 是完全正交等方组. 令

$B = \sqrt{\lambda_1}\sigma_1 + \cdots + \sqrt{\lambda_m}\sigma_m$

则 $B^2 = \mathcal{A}$（引理A）

设另一个正定算子 B' 满足 $B'^2 = \mathcal{A}$

设 $B' = \mu_1 \tau_1 + \cdots + \mu_k \tau_k$，其中 $\mu_1, \cdots \mu_k \in \mathbb{R}^+$ 两两不同，$\tau_1, \cdots \tau_k$ 是完全正交幂等组。

由 $B'^2 = \mathcal{A} \Rightarrow \mu_1^2 \tau_1 + \cdots + \mu_k^2 \tau_k = \lambda_1 \sigma_1 + \cdots + \lambda_m \sigma_m$

且 $\mu_1^2, \cdots \mu_k^2$ 两两不同。

由定理6.1中唯一性可知：$k = m$

再适当调整下标后有 $\mu_1^2 = \lambda_1, \cdots \mu_m^2 = \lambda_m$

$\Rightarrow B = B'$. $\boxed{\ }$

$\because \sigma_i \in \mathbb{R}[A] \therefore B \in \mathbb{R}[A]$

命题 6.2（极化分解）

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 可逆，则 $\exists!$ 正定算子 P 和正交算子 Q 使得

$$\mathcal{A} = PQ$$

证：设在 V 的一组标准正交基下的矩阵是 A，则 $A \in GL_n(\mathbb{R})$，且 $\mathcal{A}^*$ 在同样基底下的矩阵是 A^t。

$\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^*$ 的矩阵是 AA^t

$\because AA^t$ 对称且正定（第一章定理14.3）

$\therefore \mathcal{A} \circ \mathcal{A}^*$ 是正定算子.（命题3.1）

由命题6.1 $\exists$ 正定算子 $P \in \mathcal{L}(V)$ 使得 $AA^t = P^2 \Rightarrow$

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^* = P^2$$

$$\mathcal{A} = P \underbrace{(P^{-1}\mathcal{A})}_{Q}$$

$\cancel{Q \circ Q^* = P^{-1}\mathcal{A}\,(P^{-1}\circ\mathcal{A})^*}$

设 P, Q 在上述基底下的矩阵分别为 P, Q

$$QQ^t = (P^{-1}A)(P^{-1}A)^t = P^{-1}AA^tP^{-1}$$

$$= P^{-1}P^2P^{-1} = E$$

$\Rightarrow Q \in O_n(\mathbb{R})$ 存在性成立

唯一性 设 $A = P\circ Q = \tilde{P}\circ\tilde{Q}$，其中 $\tilde{P}$ 正定，$\tilde{Q}$ 正交. 设 $\tilde{P}, \tilde{Q}$ 在同样基底下的矩阵是 $\tilde{P}, \tilde{Q}$ 则

$$PQ = \tilde{P}\times\tilde{Q} \Rightarrow Q^tP^t = \tilde{Q}^t\tilde{P}^t$$

$$\Rightarrow PQQ^tP^t = \tilde{P}\tilde{Q}\tilde{Q}^t\tilde{P}^t$$

$$\Rightarrow PP^t = \tilde{P}\tilde{P}^t \Rightarrow P^2 = \tilde{P}^2 \quad (\because P, \tilde{P} \text{ 对称})$$

$$\Rightarrow P = \tilde{P} \quad (\text{命题 } 6.1) \Rightarrow Q = \tilde{Q}$$

$$\Rightarrow P = \tilde{P},\ Q = \tilde{Q} \quad \boxtimes$$

§7 酉空间（简介）

回忆： $\mathbb{C} = \{x + y\sqrt{-1} \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$$\overline{x + y\sqrt{-1}} = x - y\sqrt{-1}$$

$$\bar{\ } : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad \text{是自同构}$$
$$z \mapsto \bar{z}$$

$(\sqrt{-1})^2 = -1 \Rightarrow$ 无法把欧氏空间的内积推广到 $\mathbb{C}^n$

$\mathbb{C}[t]$ 中正次数的不可约多项式都是一次的

约定： 本节中 W 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间

定义：设 $f: W\times W \to \mathbb{C}$. ~~如果~~ $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in W$，$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) = \alpha f(\vec{x}, \vec{z}) + \beta f(\vec{y}, \vec{z})$$

$$f(\vec{x}, \alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) = \bar{\alpha} f(\vec{x}, \vec{y}) + \bar{\beta} f(\vec{x}, \vec{z})$$

则称 f 是 W 上的半双线性型.

设 $\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n$ 是 W 的一组基

$$\vec{x} = x_1\vec{\varepsilon}_1 + \dots + x_n\vec{\varepsilon}_n$$

$$\vec{y} = y_1\vec{\varepsilon}_1 + \dots + y_n\vec{\varepsilon}_n$$

$$f(\vec{x},\vec{y}) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i\vec{\varepsilon_i}, \sum_{j=1}^n y_j\vec{\varepsilon_j}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^n x_i f\left(\vec{\varepsilon_i}, \sum_{j=1}^n y_j\vec{\varepsilon_j}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i\overline{y_j} f(\vec{\varepsilon_i}, \vec{\varepsilon_j})$$

令 $A = (f(\vec{\varepsilon_i}, \vec{\varepsilon_j}))_{n\times n} \in M_n(\mathbb{C})$

则 $f(\vec{x},\vec{y}) = (x_1,\dots,x_n)A\begin{pmatrix}\overline{y_1}\\ \vdots\\ \overline{y_n}\end{pmatrix}$.

称 A 是 f 在 $\vec{\varepsilon_1},\dots,\vec{\varepsilon_n}$ 下的矩阵

定义：设 $f(\vec{x},\vec{y})$ 是 W 上半双线型. 如果 $f(\vec{y},\vec{x}) = \overline{f(\vec{x},\vec{y})}$. 则称 f 是 Hermitian

(厄米特的).

设 $A\in M_n(\mathbb{C})$. 如果 $\overline{A^t}=A$, 则称 A 是 Hermitian.

记号：$A^* := \overline{A^t}$ （共轭转置） $(AB)^*=B^*A^*$

注：设 $f(\vec{x},\vec{y})$ Hermitian. 则 $f(\vec{x},\vec{x})=\overline{f(\vec{x},\vec{x})}$
$\Rightarrow f(\vec{x},\vec{x})\in\mathbb{R}$

注：$f(\vec{x},\vec{y})$ 是 Hermitian $\Leftrightarrow$ f 在 W 的任一组基下的矩阵 Hermitian

验证过程与对称双线性型的矩阵是对称的类似

定义：设 $f(\vec{x},\vec{y})$ 是 W 上 Hermitian 半双线性型. 如果 $\forall\vec{x}\in W\setminus\{\vec{0}\}$. $f(\vec{x},\vec{x})>0$ 则称 f 是正定的. 此时 f 的矩阵表示称为(复)正定矩阵.

例：$f: \mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$
$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} \longmapsto x_1\overline{y_1}+\dots+x_n\overline{y_n}$$
$$= (x_1,\dots x_n)\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{y_1}\\ \vdots\\ \overline{y_n}\end{pmatrix}$$

$$f(\vec{x},\vec{x}) = (x_1,\dots x_n)\begin{pmatrix}\overline{x_1}\\ \vdots\\ \overline{x_n}\end{pmatrix} = x_1\overline{x_1}+\dots+x_n\overline{x_n}$$
$$= |x_1|^2+\dots+|x_n|^2$$

$\Rightarrow$ f 正定.

定义：设 $f(\vec{x},\vec{y})$ 是 W 上的正定半双线性型. 记 $f(\vec{x},\vec{y})=(\vec{x}\mid\vec{y})$. 则 $(W,(\ \mid\ ))$ 称为一个酉空间

$\forall \vec{x}\in W$, $\sqrt{(\vec{x}\mid\vec{x})}$ 称为 $\vec{x}$ 的长度 记为 $\|\vec{x}\|$. 如果 $\|\vec{x}\|=1$. 则称 $\vec{x}$ 是单位向量.

如果 $(\vec{x}\mid\vec{y})=0$. 则称 $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 正交.

Gram-Schmidt 正交化过程类似

于是 W 有单位正交基. 证明过程与定理1.2类似.

设 W 的一组单位正交基是 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$

设 $\vec{x}=x_1\vec{e_1}+\cdots+x_n\vec{e_n}$, $\vec{y}=y_1\vec{e_1}+\cdots+y_n\vec{e_n}$

$$(\vec{x}\mid\vec{y})=(x_1\vec{e_1}+\cdots+x_n\vec{e_n}\mid y_1\vec{e_1}+\cdots+y_n\vec{e_n})$$
$$=\left(\sum_{i=1}^n x_i\vec{e_i}\;\Big|\;\sum_{j=1}^n y_j\vec{e_j}\right)$$
$$=(x_1,\cdots,x_n)\big((\vec{e_i}\mid\vec{e_j})\big)_{n\times n}\begin{pmatrix}\overline{y_1}\\ \vdots\\ \overline{y_n}\end{pmatrix}$$
$$=(x_1,\cdots,x_n)\,E\begin{pmatrix}\overline{y_1}\\ \vdots\\ \overline{y_n}\end{pmatrix}=x_1\overline{y_1}+\cdots+x_n\overline{y_n}$$

例：~~$\vec{x},\vec{y}$~~ 设 $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $\vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ 在 $\mathbb{C}^n$ 中

$$(\vec{x}\mid\vec{y})=x_1\overline{y_1}+\cdots+x_n\overline{y_n}$$

标准基是单位正交基.

$(\mathbb{C}^n,(\ \mid\ ))$ 称为标准酉空间.

设 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$; $\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_n}$ 是酉空间 W 的两组单位正交基. 设 $P\in GL_n(\mathbb{C})$ 使得 $(\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_n})=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})P$

则 $\delta_{ij} = (\vec{\varepsilon_i} \mid \vec{\varepsilon_j})$ （∵ $\vec{\varepsilon_1},\dots,\vec{\varepsilon_n}$ 是单位正交基）

$= \left((\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})\vec{P}^{(i)} \mid (\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})\vec{P}^{(j)}\right)$

$= (\vec{P}^{(i)})^t \, \overline{\vec{P}^{(j)}}$, $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$

$\Rightarrow P^t \overline{P} = E \Rightarrow \overline{P}^t P = E$

$\Rightarrow P^* P = E$.

定义：设 $P \in GL_n(\mathbb{C})$. 如果 $P^{-1} = P^*$，则称 P 是酉矩阵 (unitary).

设 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$ 是 W 的单位正交基，$\vec{\varepsilon_1},\dots,\vec{\varepsilon_n}$ 是 W 的一组基. ~~则 $\vec{\varepsilon_1},\dots,\vec{\varepsilon_n}$ 是~~ 且

$(\vec{\varepsilon_1},\dots,\vec{\varepsilon_n}) = (\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})P$, $P \in GL_n(\mathbb{F})$

则 $\vec{\varepsilon_1},\dots,\vec{\varepsilon_n}$ 是单位正交基 $\Leftrightarrow$ P 是 酉矩阵

定义：设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. 如果存在酉矩阵 P 使得 $A = P^{-1}BP$ 即 $A = P^*BP$ 则称 A 与 B 酉相似. 记为 $A \sim_U B$.

问题：求 $M_n(\mathbb{C})$ 中矩阵在 $\sim_U$ 下的标准型.

§8. 正规算子与正规矩阵. (W是酉空间)

定义：设 $U \subset W$ 是子空间

$U^\perp = \{\vec{v} \in W \mid \forall \vec{u} \in U, \vec{u} \perp \vec{v}\}$

命题8.1 设 $U \subset W$ 是子空间. 则

(i) $W = U \oplus U^\perp$ (ii) $(U^\perp)^\perp = U$.

证明 与命题2.1 类似

定义：设 $A \in \mathcal{L}(W)$. 如果 $A^* \in \mathcal{L}(W)$

满足 $\forall \vec{x}, \vec{y} \in W$ $(A(\vec{x}) \mid \vec{y}) = (\vec{x} \mid A^*(\vec{y}))$

则称 A^* 是 A 的伴随算子

定理 8.1 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(W)$. $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 是 W 的单位正交基，$\mathcal{A}^*$ 在 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 下的矩阵是 A. 则 $\mathcal{A}^*$ 是在 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 下矩阵为 A^*，于是 $\mathcal{A}^*$ 存在且唯一.

定义：设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(W)$. 如果 $\mathcal{A}^*\mathcal{A}=\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ 则称 $\mathcal{A}$ 是正规算子. 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$ 如果 $A^*A=AA^*$，则称 A 是正规矩阵.

注：利用定理 8.1 中符号：$\mathcal{A}$ 正规 $\iff A$ 正规.

例：设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(W)$，如果 $\mathcal{A}=\mathcal{A}^*$ 则称 $\mathcal{A}$ 是 Hermitian 算子. 如果 $\mathcal{A}=-\mathcal{A}^*$，则称 $\mathcal{A}$ 的斜 Hermitian 算子. 它们都是正规算子

定义：设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 如果 $\forall\,\vec{x},\vec{y}\in W$，$(\vec{x}\mid\vec{y})=(\mathcal{A}(\vec{x})\mid\mathcal{A}(\vec{y}))$，则称 $\mathcal{A}$ 是保内算子

命题 8.2. 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(W)$. 则下列断言等价 (i) $\mathcal{A}$ 保内

(ii) $\mathcal{A}$ 在 W 的单位正交基下的矩阵是酉矩阵

(iii) $\forall\,\vec{x}\in W$ $\|\mathcal{A}(\vec{x})\|=\|\vec{x}\|$ (保长)

证明. 与命题 2.3 类似

例：酉算子是正规算子.

引理 8.1 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$

$tr(AA^*)=0\Rightarrow A=O_{m\times n}$

引理 8.2 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$ 正规

如果 $A=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ O & A_3\end{pmatrix}$，$A_1\in M_d(\mathbb{C})$，则 $A_2=O$

引理 8.3 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(W)$ 正规，$U\subset W$ 是 $\mathcal{A}$-不变的，则 (i) $U^{\perp}$ 也是 $\mathcal{A}$-不变的

(ii) $\mathcal{A}_U$ 正规

~~注~~ 引理 8.4 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(W)$ 正规，则存在 $\mathcal{A}$-不可分子空间 $U_1,\dots,U_\ell$ 使得

$V=U_1\oplus\cdots\oplus U_\ell$ 且 $U_1,\dots,U_\ell$ 两两正交

（证明与引理 2.1 — 2.4 类似）

引理 8.5 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(W)$ 正规，$W\neq\{\vec{0}\}$

如果 W 是 $\mathcal{A}$-不可分的，则 $\dim W=1$

证：假设 $\dim W>1$，由代数学基本定理，$\mathcal{A}$ 有复特征根，从而有特征向量 $\vec{w}$，则 $\langle\vec{w}\rangle$ 是 $\mathcal{A}$-不变的，从而

$W=\langle\vec{w}\rangle\oplus\langle\vec{w}\rangle^{\perp}$ 是 $\mathcal{A}$-不变子空间的非平凡直和分解 $\rightarrow\leftarrow$ ▨

定理 8.1 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(W)$ 正规，则存在 W 的一组单位正交基 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 使得 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵是对角的

证明：与讲义 18，定理 2.1 类似，更简单！

定理 8.2 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$ ~~正规~~ 正规，则

(i) $A\sim_U$ 对角阵 （比实数简单）

(ii) (a) 如果 A 是 Hermite 的，~~实~~ 则其特征根为实数

(b) 如果 A 是斜 $\cdots\cdots$ 则 $\cdots$ 为纯虚数

(c) $\cdots\cdots$ 酉矩阵，则 $\cdots$ 的模长为 1

证：(i) 与定理 2.2 类似

(ii) 设 $P^*AP=\begin{pmatrix}\alpha_1&&\\&\ddots&\\&&\alpha_n\end{pmatrix}$，其中 $\alpha_1\cdots\alpha_n\in\mathbb{C}$，$P$ 酉矩阵

(a) $A=A^*\Rightarrow\begin{pmatrix}\bar{\alpha}_1&&\\&\ddots&\\&&\bar{\alpha}_n\end{pmatrix}=(P^*AP)^*=P^*A^*P=P^*AP=\begin{pmatrix}\alpha_1&&\\&\ddots&\\&&\alpha_n\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\alpha_i=\bar{\alpha}_i\Rightarrow\alpha_i\in\mathbb{R}$

(b) ~~类似得 α_i~~ 由 $A^*=-A$ 类似得 $\alpha_i=-\bar{\alpha}_i$

$\Rightarrow\alpha_i$ 纯虚

(c) 由 $AA^*=A^*A=E$ 得

$(P^*AP)^*(P^*AP)=E \Rightarrow$

$\bar{\alpha}_i\cdot\alpha_i=1,\ i=1,\dots n$

$\Rightarrow \|\alpha_i\|=1$ □

定义: 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(W)$ 是 Hermite 的

~~如果~~ $(\mathcal{A}(\vec{x})|\vec{x})>0$, $(\forall\vec{x}\neq\vec{0})$

则称 $\mathcal{A}$ 是正定算子.

关于正定算子平方根, 可逆算子极化

分解 ~~和二次~~ 有同样的结论和类似

的证明.

引理8.6. 设 $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{L}(W)$, ~~如果~~

$\mathcal{A}\circ\mathcal{B}=\mathcal{B}\circ\mathcal{A}$

则 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 有公共的特征向量

证: 设 λ 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征根. $W_{\mathcal{A}}^{\lambda}$ 是

$\mathcal{A}$ 关于 λ 的特征子空间.

$\forall\vec{w}\in W_{\mathcal{A}}^{\lambda}$. $\mathcal{A}\circ\mathcal{B}(\vec{w})=\mathcal{B}\circ\mathcal{A}(\vec{w})$

$=\mathcal{B}(\lambda\vec{w})=\lambda\mathcal{B}(\vec{w})$

$\Rightarrow\mathcal{B}(\vec{w})\in W_{\mathcal{A}}^{\lambda}$

即 $W_{\mathcal{A}}^{\lambda}$ 是 $\mathcal{B}$-不变子空间. 于是 $\exists\vec{v}\in W_{\mathcal{A}}^{\lambda}$

是 $\mathcal{B}$ 的特征向量 $\Rightarrow\vec{v}$ 是 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的公共

特征向量

定理8.3 设 $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{L}(W)$ 正规

则 $\mathcal{A}\circ\mathcal{B}=\mathcal{B}\circ\mathcal{A}\iff$ 存在 W 的一组

单位正交基. 使得在该基下 ~~的矩~~

$\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的矩阵都是对角形

证: $\Leftarrow$ 因为 ~~对于~~ 两个对角阵

关于乘法是交换的

反之 设 $n=\dim W$. 对 n 归纳.

$n=1$ 显然

设 $n-1$ 时定理成立. 考虑 n 时. 由引理8.6

设 $\vec{v}$ 是 A, B 的公共单位特征向量

$$W = \langle \vec{v} \rangle \oplus \langle \vec{v} \rangle^{\perp}$$

由引理8.3, $A|_{\langle \vec{v}\rangle^{\perp}}, B|_{\langle \vec{v}\rangle^{\perp}}$ 是正规变换

由归纳假设. $\exists \langle \vec{v} \rangle^{\perp}$ 的一组单位正交基 $\vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ 使得 $A(\vec{e}_i)=\alpha_i \vec{e}_i$, $B(\vec{e}_i)=\beta_i \vec{e}_i$, $i=2,\dots,n$. 设 $\vec{e}_1=\vec{v}$. $A(\vec{e}_1)=\alpha_1 \vec{e}_1$, $B(\vec{e}_1)=\beta_1 \vec{e}_1$

则 A, B 在单位正交基 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ 下的矩阵分别是 $\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \alpha_2 & \\ 0 & & \ddots \ \alpha_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \beta_2 & \\ 0 & & \ddots \ \beta_n \end{pmatrix}$ 目

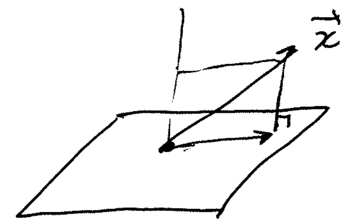
§9 最小二乘法简介

(The method of least squares)

~~定义~~ 本节中 V 是 n 维欧氏空间

定义: 设 $\vec{x}, \vec{y} \in V$, $\|\vec{x}-\vec{y}\|$ 称为 $\vec{x}, \vec{y}$ 的距离. 设 $U \subset V$ 是子空间

$$d(\vec{x}, U) := \min_{\vec{u} \in U} \|\vec{x}-\vec{u}\|$$



U

设 $V = U \oplus U^{\perp}$ (*)

π_U 是从 V 到 U (关于(*)) 的投影 (→正交投影) 则 $d(\vec{x}, U) = \|\vec{x} - \pi_U(\vec{x})\|$

求 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的解. 其中 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$

设 $U = V_c(A)$. 方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$

有解 $\Longleftrightarrow \vec{b} \in \boxed{V_c(A)}\ U$

$\Longleftrightarrow d(\vec{b}, U) = 0$

$\Longleftrightarrow \|\vec{b} - \pi_U(\vec{b})\| = 0$

$\Longleftrightarrow \vec{b} = \pi_U(\vec{b})$

设 $\pi_U(\vec{b}) = x_1 \vec{A^{(1)}} + \dots + x_n \vec{A^{(n)}}$

命题8.1 若 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 是正定算子

则 $\exists!$ 正定算子 $\mathcal{B}$，使得 $\mathcal{A}=\mathcal{B}^2$

证明：与 命题6.1 类似

命题8.2 若 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 可逆.

则 $\exists!$ 正定算子 $\mathcal{P}$ 和 西算子 $\mathcal{Q}$ 使得

$$\mathcal{A}=\mathcal{P}\circ\mathcal{Q}$$

证明 与 命题6.2 类似

§9 最小二乘方法简介

(least square)

定义：设 V 是 n 维欧氏空间

$\vec{x},\vec{y}\in V$. $|\vec{x}-\vec{y}|$ 称为 $\vec{x}$ 到 $\vec{y}$

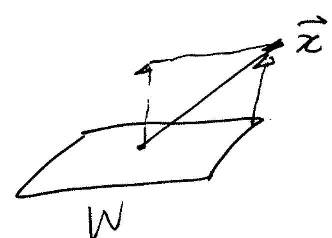
的距离

注 $|\vec{x}-\vec{y}|=0 \Longleftrightarrow \vec{x}=\vec{y}$

定义 设 $\vec{x}\in V$. W 是 V 的子空间

$\vec{x}$ 到 W 的距离

$$d(\vec{x},W)=\min_{\vec{y}\in W}\|\vec{x}-\vec{y}\|$$



$$V=W\oplus W^{\perp} \quad (*)$$

设 π_W, $\pi_{W^\perp}$ 为 关于 $(*)$

的投影

$$\|\pi_{W^\perp}(\vec{x})\|=d(\vec{x},W)$$

$$\|$$

$$\|\vec{x}-\pi_W(\vec{x})\|$$

求 $A\vec{x}=\vec{b}$

其中 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $\vec{b}\in\mathbb{R}^m$ $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

的解：$W=V_c(A)\in\mathbb{R}^m$

$$\cancel{\hat{b}}\ \pi_W(\vec{b})=\beta_1\vec{A}^{(1)}+\cdots+\beta_n\vec{A}^{(n)}$$

$$d(\vec{b},W)=\|\vec{b}-[\beta_1\vec{A}^{(1)}+\cdots+\beta_n\vec{A}^{(n)}]\|$$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}.$$

∎

则 $A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \pi_U(\vec{b}) = \vec{b}$

只要求 $A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \pi_U(\vec{b})$ 的解即可

① 由 A 的近似 $\tilde{A}$ 和 $\vec{b}$ 的近似

$\tilde{b}$ 出发，求 $x_1 \dots x_n \in \mathbb{R}$

使得 $x_1\vec{\tilde{A}^{(1)}} + \dots + x_n\vec{\tilde{A}^{(n)}}$ 是 $\tilde{b}$ 在 $V_c(\hat{A})$

上的正交投影即可.

期末考试：

1. 不变子空间和极小多项式的基本性质
2. 特征向量，特征根，特征子空间的基本性质和计算
3. 极小和特征多项式是相似不变量
4. 极小 - - - - 的关系
5. 利用特征向量，特征子空间代数和几何重数，极小多项式判定和计算方阵的对角化

6. 计算循环子空间的维数，基底；循环子空间上极小和特征多项式的关系
7. 计算低阶矩阵的Jordan标准型（系数法，初等因子法）
8. Jordan标准型中Jordan块的分布

9. 欧氏空间中内积的运算.
10. Gram-Schmidt 正交化
11. 计算正交补的单位正交基

12. 正规算子和矩阵的定义，标准型
13. 对称，斜对称，正交算子（矩阵）（正定算子）的标准型，特征根
14. 实对称矩阵通过正交矩阵 ~~对~~ 对角化