第一章 空间与形式

§1 抽象线性空间

线性方程组　矩阵　线性映射　行列式　多项式

$\boxed{\text{线性空间}}$

记号　在本章中 F 代表域.

例: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$ → 素数

整环的分式域

例: $$F^n = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n \in F \right\}$$

是域 F 上的 n 维 (列) 坐标 ~~向量~~ 空间

§1 抽象线性空间

~~定义:~~ 设 F 是域 $(F, +, \cdot, 1, 0)$　$(V, +, \vec{0})$ 是交换群

定义: 数乘: $F \times V \longrightarrow V$

$(\alpha, \vec{v}) \longmapsto \alpha\vec{v}$

满足 $\forall\ \alpha, \beta \in F$, $\vec{v} \in V$

(i) $(\alpha\beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v})$

(ii) $1\vec{v} = \vec{v}$

且 $\forall\ \vec{w} \in V$

$(\alpha+\beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$

$\alpha(\vec{v} + \vec{w}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{w}$

则称 V 是 F 上的线性空间

或向量空间

例1　n维列坐标式行坐标空间

$\mathbb{Z}_p^n$ 含有 p^n 个元素，p是素数

例2　矩阵空间　$F^{m\times n}$

例3　设 R 是 F 的扩~~域~~环/则，即 $(R,+,0,\cdot,1)$ 是环，$(F,+,0,\cdot,1)$ 是 R 的子环．则 R 是 F 上的向量空间．

验证：

$(R,+,0)$ 是交换群

$\forall \alpha\in F,\ r\in R$

数乘　$F\times R\longrightarrow R$

$(\alpha, r)\longmapsto \alpha r$ ← 环中的乘法

自然满足　$(\alpha\beta)r=\alpha(\beta r)$　(环中的结合律)

$1\cdot r=r$

$(\alpha+\beta)r=\alpha r+\beta r$　(环中的分配律)

$\alpha(r+s)=\alpha r+\alpha s$．

其中 $\beta\in F,\ s\in R$

例　$\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间；

$\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 都是 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间；

$F[x_1,\cdots x_n]$ 是 F 上的线性空间；

$M_n(F)$ 是 F 上的线性空间．

例4　函数空间：

设 S 是非空集合，V 是 F 上向量空间

$\mathrm{Func}(S,V):=\{f: S\longrightarrow V \mid f \text{ 是映射}\}$

$\forall f,g\in \mathrm{Func}(S,V)$

$$f+g: S\longrightarrow V,\quad s\longmapsto f(s)+g(s)$$

$$\mathbf{0}: S\longrightarrow V,\quad s\longmapsto 0$$

$(\mathrm{Func}(S,V),\ +,\ \mathbf{0})$ 是交换群

验证：$\forall s\in S\quad f(s)+g(s)=g(s)+f(s)\implies f+g=g+f$

$\forall s\in S\quad (f(s)+g(s))+h(s)=f(s)+(g(s)+h(s))$，其中 $h\in\mathrm{Func}(S,V)$

$\implies (f+g)+h=f+(g+h)$．

$\forall s\in S \quad f(s)+\vec{0}=f(s) \Rightarrow f+\mathbb{0}=f$

$\forall s\in S \quad f(s)+(-f(s))=\vec{0}$

$\Rightarrow f+(-f)=\mathbb{0}$，其中

$$-f:\ S \longrightarrow V$$
$$s \longmapsto -f(s)$$

断言1成立

~~断言四~~ 数乘：$F\times \mathrm{Func}(S,V)\longrightarrow \mathrm{Func}(S,V)$
$$(\alpha,\ f)\longmapsto \alpha f$$

其中 αf: ~~Func(S,V)~~ $S\longrightarrow V$
$$s\longmapsto \alpha f(s)$$

$\because \forall s\in S \quad \alpha,\beta\in F$

$(\alpha\beta)f(s)=\alpha(\beta f(s)) \Rightarrow (\alpha\beta)f=\alpha(\beta f)$

$\therefore$

$\because \forall s\in S \quad 1f(s)=f(s) \Rightarrow 1f=f$

类似地可得出：

$\forall \alpha,\beta\in F,\quad f,g\in \mathrm{Func}(S,V)$

$(\alpha+\beta)f=\alpha f+\beta f$

$\alpha(f+g)=\alpha f+\alpha g$.

于是 $\mathrm{Func}(S,V)$ 是 F 上的线性空间. ③

$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Func}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ 是线性空间}\\ \mathrm{Func}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \text{ 是线性空间}\\ \mathrm{Func}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) \text{ 是线性空间}\end{array}\right\}$ $\mathbb{R}$上的

可以把$\mathbb{R}$换成~~任意其它域~~.

例 设 V,W 是 F 上的两个线性空间

$$V\times W=\left\{\begin{pmatrix}\vec{v}\\ \vec{w}\end{pmatrix} \,\middle|\, \vec{v}, ~~\vec{w}~~ \in V,\ \vec{w}\in W\right\}$$

定义：
$$\begin{pmatrix}\vec{v}_1\\ \vec{w}_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\vec{v}_2\\ \vec{w}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{v}_1+\vec{v}_2\\ \vec{w}_1+\vec{w}_2\end{pmatrix}$$

$$\alpha\begin{pmatrix}\vec{v}\\ \vec{w}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\vec{v}\\ \alpha\vec{w}\end{pmatrix}$$

其中 $\vec{v},\vec{v}_1,\vec{v}_2\in V,\quad \vec{w},\vec{w}_1,\vec{w}_2\in W.\ \alpha\in F$

则 $V\times W$ 是 F 上的线性空间

其中，$V\times W$ 中的零向量是 $\begin{pmatrix}\vec{0}_V\\ \vec{0}_W\end{pmatrix}$.

命题1.1 设 V 是 $(F, +, 0, \cdot, 1)$ 上的线性空间. (i) 设 $\lambda \in F$, $\vec{v} \in V$. 则

$$\lambda \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ 或 } \vec{v} = \vec{0}$$

(ii) $\forall \vec{v} \in V$, $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$

证: "$\Leftarrow$" 先设 $\lambda = 0$

$$1 + 0 = 1$$

$$\Rightarrow (1+0)\vec{v} = 1\vec{v}$$

$$\Rightarrow 1\cdot\vec{v} + 0\vec{v} = 1\vec{v} \Rightarrow 0\vec{v} = \vec{0}$$

再设 $\vec{v} = \vec{0}$

$$\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \lambda(\vec{0} + \vec{0}) = \lambda\vec{0}$$

$$\Rightarrow \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0} = \lambda\vec{0} \Rightarrow \lambda\vec{0} = \vec{0}$$

"$\Rightarrow$" 设 $\lambda\vec{v} = \vec{0}$ 且 $\lambda \neq 0$

$$\lambda^{-1}(\lambda\vec{v}) = \lambda^{-1}\vec{0} = \vec{0}$$

$$(\lambda^{-1}\lambda)\vec{v} = \vec{0}$$

$$1\cdot\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}. \quad \square$$

例: 证明 $(\mathbb{Z}, +, 0)$ 不可能是 F 上的线性空间

证: 把 F 上的加法单位元和乘法单位元分别记为 0_F 和 1_F. 则

$$1_F \cdot 1 = 1$$

情形1. F 的特征为 $p > 0$

$$(\underbrace{1_F + \cdots + 1_F}_{p}) \cdot 1$$

$$= \underbrace{1_F \cdot 1 + \cdots + 1_F \cdot 1}_{p} = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{p} = p$$

另一方面 $\underbrace{1_F + \cdots + 1_F}_{p} = 0_F$

而 $0_F \cdot 1 = 0$ (命题1.1)

$$\Rightarrow 0 = p \rightarrow\leftarrow$$

情形2. F 的特征为 0

$$(\underbrace{1_F + \cdots + 1_F}_{m}) \cdot 1 = m.$$

m 是任意正整数 $m > 1$

设 $a = \underbrace{1_F + \cdots + 1_F}_{m}$. $\because \mathrm{char}(F) = 0$ $\therefore a \neq 0$

$a^{-1}\cdot 1 = n$　　n是某个整数

$$1 = 1_F\cdot 1 = (a^{-1}a)\cdot 1 = a^{-1}(a\cdot 1)$$

$$= a^{-1}m = a^{-1}(\underbrace{1+\cdots+1}_{m})$$

$$= \underbrace{a^{-1}\cdot 1+\cdots+a^{-1}\cdot 1}_{m}$$

$$= \underbrace{n+\cdots+n}_{m} = mn$$

$\because m>1$　　$1\neq mn$　$\rightarrow\leftarrow$　$\square$

注：类似地，可证明 当 m 不是素数时

$(\mathbb{Z}_m, +, \bar{0})$ 不是 F 上线性空间

定义：设 V 是 F 上线性空间

$U\subset V$ 非空

满足：(i) $\forall \vec{u},\vec{v}\in U$

$\vec{u}+\vec{v}\in U$

(ii) $\forall \alpha\in F, \vec{u}\in U$, $\alpha\vec{u}\in U$

则称 U 是 V 的子空间

注：U 是 V 的子空间 $\Leftrightarrow$ $\forall \alpha,\beta\in F, \vec{u},\vec{v}\in U$

$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\in U$

注 U 是 F 上的线性空间．$(0\cdot\vec{u}=\vec{0}\in U)$

例：F^n 中的子空间

设 $A\in F^{m\times n}$

$A\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ 的解空间是 F^n 中子空间

例：设 $SM_n(F)=\{A\in M_n(F)\mid A=A^t\}$

$SM_n(F)$ 是 $M_n(F)$ 的子空间

验证．设 $A,B\in SM_n(F)$

$(A+B)^t = A^t+B^t = A+B$

$\Rightarrow A+B\in SM_n(F)$

$\forall \alpha\in F$　$(\alpha A)^t=\alpha A^t=\alpha A$

$\Rightarrow \alpha A\in SM_n(F)$．

例：设 $F[x_1,\cdots x_n]^{(m)}=\{f\in F[x_1,\cdots x_n]\mid \deg f<m\}$

其中 m 是正整数

由第一周讲义定理3.3 可知

$F[x_1,\cdots x_n]^{(m)}$ 是 $F[x_1,\cdots x_n]$ 的子空间

把 $\mathbb{C}$ 看成 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间，则

$\mathbb{R}$ 是其子空间。

例：$V=\mathrm{Func}([a,b],\mathbb{R})$。

$C^{(0)}[a,b]$ 为 $[a,b]$ 上所有连续函数

$C^{(1)}[a,b]$ 为 $[a,b]$ 上所有可微函数

则 $C^{(0)}[a,b]$，$C^{(1)}[a,b]$ 都是 V

在 $\mathbb{R}$ 上的子空间

~~命题2.2 (i) 设 $V_1,\cdots V_k$ 是 V 的子空间~~

~~则 $V_1+\cdots+V_k$~~

例 $\{\vec{0}\}$，V 是 V 的平凡子空间

命题1.2 设 V 是 F 上线性空间。 ⑥

(i) 设 $V_1,\cdots,V_k$ 是 V 的子空间

定义 $V_1+\cdots+V_k=\{\vec{v}_1+\cdots+\vec{v}_k \mid \vec{v}_1\in V_1,\cdots \vec{v}_k\in V_k\}$

则 $V_1+\cdots+V_k$ 也是子空间

(ii) 设 Λ 是一个下标集(有限或无穷)

$\forall\lambda\in\Lambda$. V_λ 是 V 的子空间

则 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda$ 是 V 的子空间

证：(i) 设 $\vec{u},\vec{v}\in V_1+\cdots+V_k$

$\exists\ \vec{u}_1,\vec{v}_1\in V_1,\ \cdots,\ u_k,\vec{v}_k\in V_k$. 使得

$\vec{u}=\vec{u}_1+\cdots+\vec{u}_k$，$\vec{v}=\vec{v}_1+\cdots+\vec{v}_k$

$\forall\alpha,\beta\in F$

$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\alpha(\vec{u}_1+\cdots+\vec{u}_k)+\beta(\vec{v}_1+\cdots+\vec{v}_k)$

$=(\alpha\vec{u}_1+\beta\vec{v}_1)+\cdots+(\alpha\vec{u}_k+\beta\vec{v}_k)$

$\because V_1,\cdots V_k$ 是子空间

$\therefore\ \alpha\vec{u}_1+\beta\vec{v}_1\in V_1,\ \cdots,\ \alpha\vec{u}_k+\beta\vec{v}_k\in V_k$

$\Rightarrow\ \alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\in V_1+\cdots+V_k$

$\Rightarrow\ V_1+\cdots+V_k$ 是子空间

(ii) 设 $\vec{u},\vec{v}\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda$. 则

$\forall\lambda\in\Lambda$, $\alpha,\beta\in F$. $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\in V_\lambda$

$\Rightarrow\ \alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda$

$\Rightarrow\ \bigcap_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda$ 是子空间.

定义：设 $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_k\in V$. $\alpha_1,\cdots\alpha_k\in F$

$\alpha_1\vec{v}_1+\cdots+\alpha_k\vec{v}_k$ 称为 $\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_k$ 的一个线性组合. $\alpha_1,\cdots\alpha_k$ 称为该线性组合的系数

注：设 U 是 V 的子空间

$\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_k\in U$ 则 $\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_k$ 的任意线性组合也在 U 中 (见上学期讲义5-P11)

例：F^n 中的向量都是

$$\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad\cdots,\quad \vec{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

的线性组合

例：设 ~~田~~ $L_{ij}\in F^{m\times n}$，L_{ij} 在 i 行 j 列处的元素是1，其它处元素为零，$i\in\{1,\cdots,m\}$，$j\in\{1,\cdots n\}$

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$

则 $A=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}L_{ij}$

即 $F^{m\times n}$ 中的矩阵都是 $\{L_{ij}\mid i\in\{1,\cdots m\},\ j\in\{1,\cdots n\}\}$ 中矩阵的线性组合

例：$\mathbb{C}$ 中元素 $x+y\sqrt{-1}$，$x, y\in\mathbb{R}$

是 $1, \sqrt{-1}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的线性组合

例 $F[x]$ 中的元素是 $\{1, x, x^2, \cdots\}$

中元素的线性组合.

定义：设 $S\subset V$ 非空

$$\langle S\rangle := \left\{\alpha_1\vec{v}_1+\cdots+\alpha_k\vec{v}_k \;\middle|\; \begin{array}{l}\alpha_1,\cdots,\alpha_k\in F\\ \vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_k\in S\end{array}\right\}$$

称 $\langle S\rangle$ 是由 $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_k$ 在 F 上生成的子空间

注：$\langle S\rangle$ 是子空间. 验证过程与上学期讲义5，P13页的过程相同

注：$\langle S\rangle$ 是包含 S 的关于"$\subset$"最小子空间

例：证明：$\langle S\rangle$ 设 ~~$\mathcal{T}=\{U\subset V$~~

$$\mathcal{T}=\{U\subset V \mid U \text{ 是 } V \text{ 的子空间且 } S\subset U\}$$

则 $\langle S\rangle = \bigcap_{U\in\mathcal{T}} U$

证：$\because \langle S\rangle\in\mathcal{T}$ $\therefore$

$$\bigcap_{U\in\mathcal{T}} U \subset \langle S\rangle$$

设 $U\in\mathcal{T}$ $\Rightarrow$ $S\subset U$

$\Rightarrow$ 对 k 直接归纳得 $\forall\, \vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_k\in S$，$\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_k$ 的任意线性组合也在 U 中.

从而 $\langle S\rangle\subset U$

$$\Rightarrow \langle S\rangle \subset \bigcap_{U\in\mathcal{T}} U$$

$$\Rightarrow \bigcap_{U\in\mathcal{T}} U = \langle S\rangle \quad \square$$

例：设 $L=\{L_{ij}\in F^{m\times n} \mid i\in\{1,\dots,m\}, j\in\{1,\dots,n\}\}$

则 $F^{m\times n}=\langle L\rangle$

例 $\langle 1, x, \dots, x^{m-1}\rangle = F[x]^{(m)} \subset F[x]$

§2. 子空间的直和.

定义：设 $U_1, \dots, U_k \subset V$ 是子空间

记 $U=U_1+\dots+U_k$

如果 $\forall \vec{u}\in U$，存在唯一的

$\vec{u}_1\in U_1, \quad \dots, \vec{u}_k\in U_k$

使得 $\vec{u}=\vec{u}_1+\dots+\vec{u}_k$

则称 U 是 $U_1, \dots, U_k$ 的直和

记为 $U=U_1\oplus\dots\oplus U_k$

命题~~四~~ 2-1 利用上述定义中的记号

下列命题等价

(i) $U=U_1\oplus\dots\oplus U_k$

(ii) 设 $\vec{u}_1\in U_1, \dots, \vec{u}_k\in U_k$ 如果

$\vec{u}_1+\dots+\vec{u}_k=\vec{0}$

则 $\vec{u}_1=\dots=\vec{u}_k=\vec{0}$

(iii) $\forall i\in\{1,\dots,k\}$

$U_i\cap(U_1+\dots+U_{i-1}+U_{i+1}+\dots+U_k)=\{\vec{0}\}$

证：(i) $\Rightarrow$ (ii)

$\vec{0}=\vec{u}_1+\dots+\vec{u}_k=\vec{0}+\dots+\vec{0}$

由直和的定义. $\vec{u}_1=\vec{0}, \dots \vec{u}_k=\vec{0}$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 不妨设 $i=1$.

令 $\hat{U}_1=U_2+\dots+U_k$.

设 $\vec{v}\in U_1\cap\hat{U}_1$ 存在 $\vec{u}_2\in U_2, \dots, \vec{u}_k\in U_k$

$\vec{v}=\vec{u}_2+\dots+\vec{u}_k$ 。

$\Rightarrow \vec{0}=\vec{v}+(-\vec{u}_2)+\dots+(-\vec{u}_k)$

$\quad\;\; \cap\!\!|\; U_1 \quad \cap\!\!|\; U_2 \quad\quad \cap\!\!|\; U_k$

于是 $\vec{v}=\vec{0}$

(iii) $\Rightarrow$ (i) 设 $\vec{v}\in U_1+\cdots+U_k$

$$\vec{v}=\vec{u}_1+\cdots+\vec{u}_k=\vec{u}_1'+\cdots+\vec{u}_k'$$

其中 $\vec{u}_1,\vec{u}_1'\in U_1,\ \ldots,\ \vec{u}_k,\vec{u}_k'\in U_k$

则 $(\vec{u}_1-\vec{u}_1')+\cdots+(\vec{u}_k-\vec{u}_k')=\vec{0}$

$$(\vec{u}_1-\vec{u}_1')=(\vec{u}_2'-\vec{u}_2)+\cdots+(\vec{u}_k'-\vec{u}_k)$$

$\Rightarrow \vec{u}_1-\vec{u}_1'\in U_1\cap \hat{U}_1$

$\Rightarrow \vec{u}_1-\vec{u}_1'=\vec{0}\Rightarrow \vec{u}_1=\vec{u}_1'$

同理可证：$\vec{u}_2=\vec{u}_2',\ \ldots,\ \vec{u}_k=\vec{u}_k'$

注：设 $U=U_1\oplus\cdots\oplus U_k$

$i_1,\ldots i_s\in\{1,\ldots k\}$ 两两不同

则 $U_{i_1}+\cdots+U_{i_s}$ 也是直和

证：设 $\vec{u}_{i_1}\in U_{i_1},\ldots\vec{u}_{i_s}\in U_{i_s}$

使得 $\vec{0}=\vec{u}_{i_1}+\cdots+\vec{u}_{i_s}$

则 $\vec{0}=\vec{0}+\cdots+\vec{0}+\vec{u}_{i_1}+\vec{0}+\cdots+\vec{0}+\vec{u}_{i_2}+\vec{0}+\cdots+\vec{0}$
$+\vec{u}_{i_s}+\vec{0}+\cdots\vec{0}$ 共 k 项

$\Rightarrow U=U_1\oplus\cdots\oplus U_s\Rightarrow \vec{u}_{i_1}=\cdots=\vec{u}_s=\vec{0}$

$\Rightarrow U_{i_1}+\cdots+U_{i_s}$ 是直和

例：设 $V=F[x]$. $U_1=\langle 1,x\rangle$

$U_2=\langle x^2\rangle$, $U_3=\langle x^3,x^4\rangle$

$$F[x]^{(5)}=U_1\oplus U_2\oplus U_3$$

$$0=\overbrace{(\alpha_0\cdot 1+\alpha_1 x)}^{\vec{u}_1}+\overbrace{(\alpha_2 x^2)}^{\vec{u}_2}+\overbrace{(\alpha_3 x^3+\alpha_4 x^4)}^{\vec{u}_3}$$

$$=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\alpha_4 x^4$$

$\Rightarrow \alpha_0=\alpha_1=\cdots=\alpha_4=0$

$\Rightarrow \vec{u}_1=\vec{u}_2=\vec{u}_3=0$

$$F[x]^{(5)}=\{\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\alpha_4 x^4\mid \alpha_i\in F\}$$

$\square$

例：设 $SM_n(F)=\{A\in M_n(F)\mid A=A^t\}$

$AM_n(F)=\{A\in M_n(F)\mid A=-A^t\}$

问 $M_n(F)$ 是否是 $SM_n(F)$ 和 $AM_n(F)$ 的直和？

解：先已证：$SM_n(F)$ 是 $M_n(F)$ 的子空间

类似地可证 $AM_n(F)$ 是 $M_n(F)$ 的子空间

由命题2.1 $SM_n(F)+AM_n(F)$ 是直和

$$\Longleftrightarrow SM_n(F)\cap AM_n(F)=\{O_{n\times n}\}$$

设 $A\in SM_n(F)\cap AM_n(F)$

$$\left.\begin{array}{l}A^t=A\\ A^t=-A\end{array}\right\}\Rightarrow A+A=O_{n\times n}$$

$$\Rightarrow 2A=O_{n\times n}$$

当 $2\neq 0$ 时，$A=O_{n\times n}$

即当 $\mathrm{char}(F)\neq 2$ 时 $SM_n(F)+AM_n(F)$ 是直和。当 $\mathrm{char}(F)=2$ 时

$$1+1=0\Rightarrow 1=-1$$

$E_n^t=E_n$ 且 $E_n^t=-E_n$

$$\Rightarrow E_n\in SM_n(F)\cap AM_n(F)$$

于是 $SM_n(F)+AM_n(F)$ 不是直和

从此假设 $\mathrm{char}(F)\neq 2$，则 $1+1$ 在 F 中可逆。设 $A\in M_n(F)$

$A+A^t$ 对称

$A-A^t$ 斜对称

$$A=\frac{A+A^t}{2}+\frac{A-A^t}{2}$$

$$\Rightarrow M_n(F)=SM_n(F)+AM_n(F)$$

即 $M_n(F)=SM_n(F)\oplus AM_n(F)$

$$\Longleftrightarrow \mathrm{char}(F)\neq 2.$$

§3 线性相关性

定义：设 $\vec{v_1},\dots,\vec{v_k}\in V$. ~~如果存在~~ $\alpha_1,\dots\alpha_k\in F$ 不全为零. 使得

$$\alpha_1\vec{v_1}+\dots+\alpha_k\vec{v_k}=\vec{0}$$

则称 $\vec{v_1},\dots,\vec{v_k}$ (在 F 上)线性相关

否则称 $\vec{v_1},\dots,\vec{v_k}$ (在 F 上)线性无关

例：设 $\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间

则 $1,\sqrt{2},\sqrt{-1}$ 线性相关

$$\underline{\sqrt{2}}\cdot 1+\underline{(-1)}\sqrt{2}+\underline{0}\sqrt{-1}=0$$

设 $\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间

$1,\sqrt{2},\sqrt{-1}$ 线性无关

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{Q}$ 使得

$$0=\underbrace{\alpha_1\cdot 1+\alpha_2\sqrt{2}}_{\text{实部}}+\underbrace{\alpha_3\sqrt{-1}}_{\text{虚部}}$$

$\Rightarrow \alpha_3=0 \quad \alpha_1+\alpha_2\sqrt{2}=0$

$\because \sqrt{2}$ 是无理数 $\therefore \alpha_1=\alpha_2=0$

例：在 $F[x]$ 中. $\forall d\in\mathbb{Z}^+$,

$\{1,x,\dots,x^{d-1}\}$ 线性无关 (在 F 上)

因为 x 是未定元 (见~~上学期~~讲义 L15. 引理2.2, P13)

所以

$\forall \alpha_0,\dots\alpha_{d-1}\in F \quad \alpha_0\cdot 1+\alpha_1 x+\dots+\alpha_{d-1}x^{d-1}=0$

$$\Rightarrow \alpha_0=\alpha_1=\dots=\alpha_{d-1}=0$$

注 上学期讲的关于线性相关性的结论都成立

例如：设 $\vec{v},\vec{v_1},\dots,\vec{v_i},\dots\vec{v_k}\in V$

① $\vec{v_1}\dots\vec{v_i}$ 线性相关 $\Rightarrow \vec{v_1}\dots\vec{v_i},\dots\vec{v_k}$ 线性相关

② $\vec{v_1},\dots,\vec{v_i},\dots\vec{v_k}$ 线性无关 $\Rightarrow \vec{v_1},\dots,\vec{v_i}$ 线性无关

③ $\vec{v_1},\dots\vec{v_k}$ 线性相关 $\Rightarrow \exists i\in\{1,\dots k\}$

使得 $\vec{v_i}$ 是 $\vec{v_1},\dots\vec{v_{i-1}},\vec{v_{i+1}},\dots\vec{v_k}$

在 F 上的线性组合.

④ 设 $\vec{v_1},\dots,\vec{v_k}$ 线性无关，且 $\vec{v},\vec{v_1},\dots,\vec{v_k}$ 线性相关，则 $\exists!\ \beta_1,\dots\beta_k\in F$

使得 $\vec{v}=\beta_1\vec{v_1}+\dots+\beta_k\vec{v_k}$

验证④

设 $\alpha_0\vec{v}+\alpha_1\vec{v_1}+\dots+\alpha_k\vec{v_k}=\vec{0}$

其中 $\alpha_0,\alpha_1,\dots\alpha_k\in F$，不全为零

则 $\alpha_0\neq 0$．否则 $\vec{v_1},\dots,\vec{v_k}$ 线性相关 →←

于是 $\vec{v}=\left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right)\vec{v_1}+\dots+\left(-\frac{\alpha_k}{\alpha_0}\right)\vec{v_k}$

令 $\beta_1=-\frac{\alpha_1}{\alpha_0},\dots\ \beta_k=\frac{\alpha_k}{\alpha_0}$ 得

$$\vec{v}=\beta_1\vec{v_1}+\dots+\beta_k\vec{v_k}$$

再设 $\vec{v}=\lambda_1\vec{v_1}+\dots+\lambda_k\vec{v_k}$，其中 $\lambda_i\in F$

则 $(\beta_1-\lambda_1)\vec{v_1}+\dots+(\beta_k-\lambda_k)\vec{v_k}=\vec{0}$

$\because\ \vec{v_1},\dots,\vec{v_k}$ 线性无关

$\therefore\ \beta_1=\lambda_1,\dots,\beta_k=\lambda_k$ □

例：设 $\vec{v_1},\dots,\vec{v_k}\in F^n$

设 $A=(\vec{v_1},\dots\vec{v_k})_{n\times k}$

则 $\vec{v_1},\dots,\vec{v_k}$ 线性相关 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A)<k$.

例：设 $p_1,\dots,p_k\in F[x]\setminus\{0\}$.

设 $d=\max(\deg(p_1),\dots,\deg p_k)$.

令 $p_i=\alpha_{i0}+\alpha_{i1}x+\dots+\alpha_{id}x^d$.

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{10} & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1d}\\ & & \cdots & \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \alpha_{kd}\end{pmatrix}_{k\times(d+1)}$$

则 $p_1,\dots,p_k$ 线性相关 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A)\leq k$

例：$\cos x, \sin x\in \mathrm{Func}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{R}$ 上

是否线性相关

设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 使得

$$\alpha\cos x+\beta\sin x=0$$

取 $x=0$ 得 $\alpha=0$　取 $x=\frac{\pi}{2}$ 得 $\beta=0$

于是 $\cos x$, $\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关

例：证明：$1, \cos^2 x, \sin^2 x \in \mathrm{Func}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性相关。

证：因为 $\cos^2 x + \sin^2 x + (-1)\cdot 1 = 0$

所以 它们线性相关。

例：设 $f, g \in C^{(1)}[a, b]$

(i) 如果 f, g 在 $\mathbb{R}$ 上线性相关，则

$\forall x \in [a, b]$ $\quad \begin{vmatrix} f(x), & g(x) \\ f'(x), & g'(x) \end{vmatrix} = 0$

(ii) 再假设 $\forall x \in [a, b]$ $f(x) \neq 0$ ~~且 $g(x)\neq 0$~~

则 (i) 的逆命题也成立。

证：设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 使得

$$\alpha f + \beta g = 0$$

即 $\forall x \in [a, b]$ $\quad \alpha f(x) + \beta g(x) = 0$

则 $\quad \alpha f'(x) + \beta g'(x) = 0$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix}}_{A(x)} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(i) 设 α, β 不全为零 $\Rightarrow$ $\det A(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$

(ii) 由 $\det A(x) = 0$ 得

$\forall x \in [a, b]$ $\quad f(x) g'(x) - f'(x) g(x) = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{g'(x) f(x) - g(x) f'(x)}{f^2(x)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)' = 0 \quad \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \text{ 使得}$$

$$g(x) = c f(x)$$

$\Rightarrow$ g, f 在 $\mathbb{R}$ 上线性相关

注：一般结论．查阅维基 Wronskian

例：设 $\alpha_1, \cdots \alpha_n \in \mathbb{R}$ 判断

$e^{\alpha_1 x}, \cdots e^{\alpha_n x} \in \mathrm{Func}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

是否线性无关？

解：当 $\alpha_1,\cdots\alpha_n$ 中有两个相同时

$e^{\alpha_1 x},\cdots e^{\alpha_n x}$ 中也有两个相同，

于是它们线性相关

设：$\alpha_1,\cdots\alpha_n$ 两两不相等.

法1 设 $\lambda_1,\cdots\lambda_n\in\mathbb{R}$ 使得

$$\lambda_1 e^{\alpha_1 x}+\cdots+\lambda_n e^{\alpha_n x}=0 \qquad (*)$$

法1 (赋值)

取 $x=0,1,\cdots,n-1$ 得

$x=0$ $\quad\lambda_1+\cdots+\lambda_n=0$

$x=1$ $\quad\lambda_1 e^{\alpha_1}+\cdots+\lambda_n e^{\alpha_n}=0$

$x=2$ $\quad\lambda_1 e^{2\alpha_1}+\cdots+\lambda_n e^{2\alpha_n}=0$

$\cdots$

$x=n-1$ $\quad\lambda_1 e^{(n-1)\alpha_1}+\cdots+\lambda_n e^{(n-1)\alpha_n}=0$

$$\Longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ e^{\alpha_1} & e^{\alpha_2} & \cdots & e^{\alpha_n} \\ (e^{\alpha_1})^2 & (e^{\alpha_2})^2 & \cdots & (e^{\alpha_n})^2 \\ (e^{\alpha_1})^{n-1} & (e^{\alpha_2})^{n-1} & \cdots & (e^{\alpha_n})^{n-1} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\because$ $e^{\alpha_1},\cdots e^{\alpha_n}$ 两两不同

$\therefore$ $\det(A)\neq 0$ (范德蒙行列式)

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$ $\quad(\mathrm{rank}(A)=n)$

法2 (微分)

对 (*) 微分

0次 $\quad\lambda_1 e^{\alpha_1 x}+\lambda_2 e^{\alpha_2 x}+\cdots+\lambda_n e^{\alpha_n x}=0$

1次 $\quad\lambda_1\alpha_1 e^{\alpha_1 x}+\lambda_2\alpha_2 e^{\alpha_2 x}+\cdots+\lambda_n\alpha_n e^{\alpha_n x}=0$

$\vdots$

(n-1)次 $\quad\lambda_1\alpha_1^{n-1}e^{\alpha_1 x}+\lambda_2\alpha_2^{n-1}e^{\alpha_2 x}+\cdots+\lambda_n\alpha_n^{n-1}e^{\alpha_n x}=0$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ & \cdots & & \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} \lambda_1 e^{\alpha_1 x} \\ \lambda_2 e^{\alpha_2 x} \\ \vdots \\ \lambda_n e^{\alpha_n x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\det(B)\neq 0 \Rightarrow \lambda_i e^{\alpha_i x}=0,\ i=1\dots k$

$\Rightarrow \lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$

$\Rightarrow e^{\alpha_1 x},\cdots,e^{\alpha_n x}$ 线性无关