符号约定：$(F, +, 0, \cdot, 1)$ 是域

V, W 是 F 上的线性空间，它们的"零向量"分别记为 $\vec{0}_V$ 和 $\vec{0}_W$

§4 线性映射

定义：$\varphi: V \to W$ 称为线性的，

如果 $\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in F,\ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$，

$$\varphi(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2) = \alpha_1\varphi(\vec{v}_1) + \alpha_2\varphi(\vec{v}_2).$$

注：上述条件可以等价地表述为

(i) $\varphi(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \varphi(\vec{v}_1) + \varphi(\vec{v}_2)$

(ii) $\varphi(\alpha_1\vec{v}_1) = \alpha_1\varphi(\vec{v}_1)$

以下事实在上学期讲义7中都验证过

设 $\varphi: V \to W$ 是线性映射

① $\varphi(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$

② 设 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in V,\ \alpha_1, \dots, \alpha_k \in F$

$$\varphi(\alpha_1\vec{v}_1 + \dots + \alpha_k\vec{v}_k) = \alpha_1\varphi(\vec{v}_1) + \dots + \alpha_k\varphi(\vec{v}_k)$$

由此可知

- $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ 线性相关 $\Rightarrow \varphi(\vec{v}_1), \dots, \varphi(\vec{v}_k)$ 线性相关
- $\varphi(\vec{v}_1), \dots, \varphi(\vec{v}_k)$ 线性无关 $\Rightarrow \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ 线性无关

③ 设 $V' \subset V,\ W' \subset W$ 是子空间

- $\varphi(V') \subset W$ 是子空间
- $\varphi^{-1}(W') \subset V$ 是子空间（见习题课讲义9）
- $\ker(\varphi) := \varphi^{-1}(\{\vec{0}_W\})$ 和 $\operatorname{im}(\varphi) := \varphi(V)$ 是子空间

④ φ 是单射 $\iff \ker(\varphi) = \{\vec{0}_V\}$

验证④ "$\Rightarrow$" $\varphi(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$ 且 φ 是单射

则 $\ker(\varphi) = \{\vec{0}_V\}$

"$\Leftarrow$" 设 $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ 满足 $\varphi(\vec{v}_1) = \varphi(\vec{v}_2)$

则 $\varphi(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \vec{0}_W \Rightarrow \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \in \ker(\varphi)$

$\Rightarrow \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{0}_V \Rightarrow \varphi$ 是单射 □

例: $\varphi: V \longrightarrow W$, $\vec{v} \longmapsto \vec{0}_W$ 零映射

$id_V: V \longrightarrow V$, $\vec{v} \longmapsto \vec{v}$ 恒同映射

} 线性的

例: 设 $U \subset V$ 是子空间

$\varphi: U \longrightarrow V$, $\vec{u} \longmapsto \vec{u}$ 嵌入 是线性的

例 设 $\varphi: F^n \longrightarrow F^m$ 的线性映射

则 $\exists\ A \in F^{m\times n}$，使得 $\forall\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V$

$$\varphi(\vec{x}) = A\vec{x}$$

称 A 是 φ 在标准基下的矩阵

$\ker(\varphi)$ 是 $A\vec{x} = \vec{0}_{F^n}$ 的解空间

$\mathrm{im}(\varphi) = V_c(A)$ A 的列空间

φ 是单射 $\Longleftrightarrow \mathrm{rank}(A) = n$

φ 是满射 $\Longleftrightarrow \mathrm{rank}(A) = m$

[见上学期讲义7. §3.2, 讲义8. 命题3.4]

注: 线性映射 $\varphi: V \to F$ 也称为线性函数

例: 设 $A \in M_n(F)$，$A = (a_{ij})$

$$tr(A) := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

$$tr: M_n(F) \longrightarrow F,\quad A \longmapsto tr(A)$$

验证: tr 是线性函数

设 $\alpha, \beta \in F$，$A, B \in M_n(F)$，$A = (a_{ij})$，$B = (b_{ij})$

$$tr(\alpha A + \beta B) = tr((\alpha a_{ij} + \beta b_{ij}))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_{kk} + \beta b_{kk}) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_{kk} + \beta \sum_{k=1}^{n} b_{kk}$$

$$= \alpha\, tr(A) + \beta\, tr(B).$$

例: 设 $g \in F[x] \setminus \{0\}$. $\forall f \in F[x]$

f 关于 g 的余式 记为 $rem(f, g)$

定义: $\varphi_g: F[x] \longrightarrow F[x]$, $f \longmapsto rem(f, g)$.

验证 φ_g 是线性映射

设 $p_1, p_2 \in F[x]$. 由多项式除法

$p_1 = q_1 g + r_1$, $p_2 = q_2 g + r_2$

其中 $q_1, q_2 \in F[x]$, r_1, r_2 是余式

$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F$

$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 = (\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2) g + \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2$

$\deg(\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2) \leq \max(\deg(r_1), \deg(r_2)) < \deg(g)$

由余式的唯一性 (见 ~~讲义~~ 上学期讲义16 定理2.3)

$\mathrm{rem}(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2, g) = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2$

换言之

$\varphi_g(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2) = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 = \varphi_g(p_1) + \alpha_2 \varphi_g(p_2)$

φ_g 是线性映射

$\ker(\varphi_g) = \{ f \in F[x] \mid g \mid f \}$

$\mathrm{im}(\varphi_g) = F[x]^{(\deg g)}$

几个特例

设 $g = x - \alpha$ $\qquad \varphi_{x-\alpha}(f(x)) = f(\alpha)$ [余式定理]

即 赋值同态是线性的

设 $g = x^d$ $\qquad d > 0$

$\varphi_{x^d}\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i\right) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{d-1} x^{d-1}$

即 "忽略" 高阶项是线性映射.

例: $C[a,b] = \{ f: [a,b] \to \mathbb{R} \mid f$ 连续 $\}$

$C^{(1)}[a,b] = \{ f: [a,b] \to \mathbb{R} \mid f$ 可导且~~导数~~ 连续 $\}$

$\frac{d}{dx}: C^{(1)}[a,b] \longrightarrow C[a,b]$

$f(x) \longmapsto \frac{df}{dx}$

由数学分析知识可知 $\frac{d}{dx}$ 是线性的

$\ker(\frac{d}{dx})$ 是 $[a,b]$上所有常值函数的集合

设 $f\in C[a,b]$. 则 $\int_a^x f(x)dx$ ，$x\in[a,b]$

在 $C^{(1)}[a,b]$ 中且 $\frac{d}{dx}(\int_a^x f(x)dx)=f(x)$

于是 $\frac{d}{dx}$ 是满射.

$$\int_a^x : C[a,b] \longrightarrow C^{(1)}[a,b]$$
$$f(x) \longmapsto \int_a^x f(x)dx$$

$\int_a^x$ 是线性映射，~~是单射~~

$\ker(\int_a^x) = \{零函数\} \Rightarrow \int_a^x$ 是单射

$\because \int_a^a f(x)\,dx=0 \quad \therefore \int_a^x$ 不是满射 ∎

记号 $Hom_F(V,W) := \{\varphi: V\to W \mid \varphi 是线性映射\}$

命题 4.1. $Hom_F(V,W)$ 是F上的线性空间

注: $Hom_F(V,W)$ 可简记为 $Hom(V,W)$

~~命题~~ 证: $\because Hom(V,W) \subset Func(V,W)$

$\therefore$ 只要验证 $Hom(V,W)$ 是子空间

设 $\varphi_1, \varphi_2 \in Hom(V,W)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in F$

对 $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in V$

$$(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)(\vec{v_1}+\vec{v_2})$$
$$= (\alpha_1\varphi_1)(\vec{v_1}+\vec{v_2}) + (\alpha_2\varphi_2)(\vec{v_1}+\vec{v_2}) \quad [加法定义]$$
$$= \alpha_1(\varphi_1(\vec{v_1}+\vec{v_2})) + \alpha_2(\varphi_2(\vec{v_1}+\vec{v_2})) \quad [数乘定义]$$
$$= \alpha_1(\varphi_1(\vec{v_1})+\varphi_1(\vec{v_2})) + \alpha_2(\varphi_2(\vec{v_1})+\varphi_2(\vec{v_2})) \quad [\varphi_1, \varphi_2 线性]$$
$$= [\alpha_1\varphi_1(\vec{v_1})+\alpha_2\varphi_2(\vec{v_1})] + [\alpha_1\varphi_1(\vec{v_2})+\alpha_2\varphi_2(\vec{v_2})]$$
$$= (\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)(\vec{v_1}) + (\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)(\vec{v_2})$$

类似可验证

$\forall \vec{v}\in V$. $\lambda\in F$

$$(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)(\lambda\vec{v}) = \lambda(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)(\vec{v})$$

$\Rightarrow \alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2 \in Hom(V,W)$ 是子空间 ∎

例：$\psi_d: F[x] \longrightarrow F[x]$

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i \mapsto \sum_{i=d}^{n} \alpha_i x^i$$

（忽略多项式中次数小于 d 次的项）

证明 ψ_d 是线性的

证：$\psi_d = id_{F[x]} - \varphi_{x^d} \Rightarrow \psi_d$ 线性

（命题 4.1）

命题 4.2 设 $\varphi \in Hom(V, W)$. ~~如果~~ φ 是双射，则 $\varphi^{-1} \in Hom(W, V)$

证：设 $\alpha_1, \alpha_2 \in F$. $\vec{w_1}, \vec{w_2} \in W$

~~∵ φ 满 ∴ ∃ v_1~~ 设 $\vec{v_1} = \varphi^{-1}(\vec{w_1})$, $\vec{v_2} = \varphi^{-1}(\vec{w_2})$

$$\varphi(\alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2}) = \alpha_1 \varphi(\vec{v_1}) + \alpha_2 \varphi(\vec{v_2}) = \alpha_1 \vec{w_1} + \alpha_2 \vec{w_2}$$

于是 $\varphi^{-1}(\alpha_1 \vec{w_1} + \alpha_2 \vec{w_2}) = \alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2}$

$$= \alpha_1 \varphi^{-1}(\vec{v_1}) + \alpha_2 \varphi^{-1}(\vec{v_2}) \quad \boxtimes$$

定义：设 $\varphi \in Hom(V, W)$ 是双射，则称 φ 是线性同构．

例：$T: F^{m\times n} \longrightarrow F^{n\times m}$

$$A \mapsto A^t$$

证明 T 是线性 ~~同构~~ 双射

证：设 $\alpha, \beta \in F$，$A, B \in F^{m\times n}$

$$T(\alpha A + \beta B) = (\alpha A + \beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t$$

$$= \alpha T(A) + \beta T(B)$$

于是 $T \in Hom(F^{m\times n}, F^{n\times m})$

设 $H: F^{n\times m} \longrightarrow F^{m\times n}$

$$C \mapsto C^t$$

$$T \circ H(C) = T(C^t) = (C^t)^t = C$$

同样 $H \circ T(A) = A$. 于是 T 是双射 $\boxtimes$

定理 4.1 设 U 是 F 上线性空间

$\varphi \in Hom(U, V)$, $\psi \in Hom(V, W)$

则 $\psi \circ \varphi \in Hom(U, W)$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi\circ\varphi"'] & V \arrow[d, "\psi"] \\ & W \end{tikzcd}$$

证明 见上学期讲义8 命题4.3 ☐

例：$\frac{d}{dx} : C^{(1)}[a,b] \to C[a,b]$

$\int_a^x : C[a,b] \to C^{(1)}[a,b]$

$$\frac{d}{dx}\circ\int_a^x : C[a,b]\to C[a,b]$$

$$\left(\frac{d}{dx}\circ\int_a^x\right)(f(x)) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(x)\,dx\right) = f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\circ\int_a^x = id_{C[a,b]}$$

$$\int_a^x\circ\frac{d}{dx} : C^{(1)}[a,b]\to C^{(1)}[a,b]$$

$$\left(\int_a^x\circ\frac{d}{dx}\right)(g(x)) = \int_a^x \frac{dg}{dx}\,dx = g(x)-g(a)$$

$(\because$ FTC$)$.

定义：设 $\varphi\in Hom(V,W)$. 如果 φ 是双射 则称 φ 是线性同构.

若 $Hom(V,W)$ 有线性同构，则称 V 和 W 是线性同构的. 记为 $V\simeq W$

自己验证，"$\simeq$" 是等价关系.

§5 商空间

定义：设 U 是 V 的子空间. 在 V 上定义二元关系 $\sim_U$ 如下.

$\vec{v_1}\sim_U\vec{v_2}$ 如果 $\vec{v_1}-\vec{v_2}\in U$.

验证 $\sim_U$ 是等价关系

$\forall\vec{v}\in V$ $\vec{v}-\vec{v}=\vec{0}\in V \Rightarrow \vec{v}\sim_U\vec{v}$ (自反)

设 $\vec{v_1}\sim_U\vec{v_2}$. 则 $\vec{v_1}-\vec{v_2}\in U \Rightarrow \vec{v_2}-\vec{v_1}\in U$

$\Rightarrow \vec{v_2}\sim_U\vec{v_1}$ (对称)

设 $\vec{v}_1 \sim_U \vec{v}_2$ 和 $\vec{v}_2 \sim_U \vec{v}_3$. 则

$\vec{v}_1-\vec{v}_2,\ \vec{v}_2-\vec{v}_3 \in U \Rightarrow \vec{v}_1-\vec{v}_3 \in U$

$\Rightarrow \vec{v}_1 \sim_U \vec{v}_3$ (传递)

于是 $\sim_U$ 是等价关系

下面我们说明 $\sim_U$ 是一种特殊的等价关系 — 同余关系 (congruence)

设 $\vec{v} \in V$. $\vec{v}$ 关于 $\sim_U$ 等价类

$$\overline{\vec{v}} = \{\vec{v}' \in V \mid \vec{v}' \sim_U \vec{v}\}$$

$$= \{\vec{v}' \in V \mid \vec{v}' - \vec{v} \in U\}$$

$$= \{\vec{v} + \vec{v}' - \vec{v} \mid \vec{v}' - \vec{v} \in U\}$$

$$= \{\vec{v} + \vec{u} \mid \vec{u} \in U\}$$

$$= \vec{v} + U \quad \text{(线性流形)}$$

见上学期讲义!!

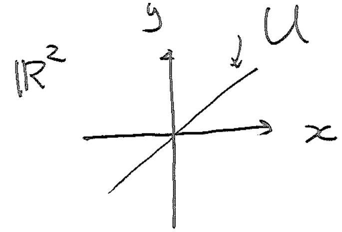
注: $\vec{v}_1 + U = \vec{v}_2 + U \Leftrightarrow \vec{v}_1 \sim_U \vec{v}_2$

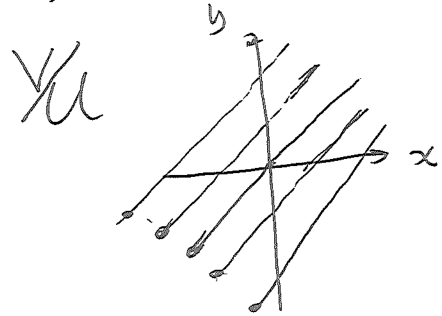
$\vec{v} + U = \vec{0} + U \Leftrightarrow \vec{v} \in U$.

于是 $V/\sim_U = \{\vec{v} + U \mid \vec{v} \in V\}$

把商集 $V/\sim_U$ 简记为 V/U

例: 设 $V = \mathbb{R}^2$, $U = \langle \binom{1}{1} \rangle = \{\binom{\alpha}{\alpha} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$





引理 5.1 (i) 设 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in V$. 则

如果 $\vec{v}_1 \sim_U \vec{w}_1$, $\vec{v}_2 \sim_U \vec{w}_2$. 则

$$(\vec{v}_1 + \vec{w}_2) \sim_U (\vec{w}_1 + \vec{w}_2)$$

(ii) 设 $\vec{v}, \vec{w} \in V$. $\alpha \in F$

如果 $\vec{v} \sim_U \vec{w}$. 则 $\alpha\vec{v} \sim_U \alpha\vec{w}$

证: (i) $\vec{v}_1 \sim_U \vec{w}_1$, $\vec{v}_2 \sim_U \vec{w}_2 \Rightarrow \vec{v}_1-\vec{w}_1,\ \vec{v}_2-\vec{w}_2 \in U$

$$\Rightarrow (\vec{v}_1+\vec{v}_2)-(\vec{w}_1+\vec{w}_2) \in U$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1+\vec{v}_2 \sim_U \vec{w}_1+\vec{w}_2$$

(ii) $\vec{v} \sim_U \vec{w} \Rightarrow \vec{v}-\vec{w} \in U$

$$\Rightarrow \alpha(\vec{v}-\vec{w}) \in U \Rightarrow \alpha\vec{v}-\alpha\vec{w} \in U$$

$$\Rightarrow \alpha\vec{v} \sim_U \alpha\vec{w}$$ ☐

在商集 $V/U=\{\vec{v}+U \mid \vec{v}\in V\}$ 中定义

加法: $(\vec{v}_1+U)+(\vec{v}_2+U)=(\vec{v}_1+\vec{v}_2)+U$ (*)

数乘: $\alpha(\vec{v}+U)=\alpha\vec{v}+U$

其中 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v} \in V$. $\alpha \in F$.

验证良定义: 设 $\vec{v}_1+U=\vec{w}_1+U$

$\vec{v}_2+U=\vec{w}_2+U$

由引理5.1 (i)

$$(\vec{v}_1+\vec{v}_2)+U=(\vec{w}_1+\vec{w}_2)+U$$

$$\Rightarrow (\vec{v}_1+U)+(\vec{v}_2+U)=(\vec{w}_1+U)+(\vec{w}_2+U)$$

加法是良定义的

设 $\vec{v}+U=\vec{w}+U$ 由引理6.1 (ii)

$\forall \alpha\in F$ $\alpha\vec{v}+U=\alpha\vec{w}+U \Rightarrow \alpha(\vec{v}+U)=\alpha(\vec{w}+U)$

数乘是良定义的

$(V/U, +, \vec{0}_V+U)$ 是交换群

$(V/U, +, \vec{0}+U, 数乘)$ 是 F 上线性空间

称为 V 关于 U 的商空间

命题5.1 设 U 是 V 的子空间

则商映射: $\pi: V \longrightarrow V/U$, $\vec{v} \longmapsto \vec{v}+U$

是线性满射, $\ker(\pi)=U$.

证: $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F$, $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in V$

$$\pi(\alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2}) = (\alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2}) + U \quad [\pi\text{的定义}]$$

$$= (\alpha_1\vec{v_1} + U) + (\alpha_2\vec{v_2} + U) \quad [V/U\text{ 加法定义}]$$

$$= \alpha_1(\vec{v_1} + U) + \alpha_2(\vec{v_2} + U) \quad [V/U\text{ 数乘定义}]$$

$$= \alpha_1\pi(\vec{v_1}) + \alpha_2\pi(\vec{v_2}) \quad [\pi\text{ 的定义}]$$

π 线性. 商映~~射都~~是满射

$\pi(\vec{v} + U) = \vec{0} + U \Rightarrow \vec{v} + U = \vec{0} + U$

$\Rightarrow \vec{v} \in U$.

$\ker(\pi) \subset U$. $U \subset \ker(\pi)$ 是显然的

例: 设 $F[x]$, $U = \langle x, x^3, x^5, \dots \rangle$

$$V/U = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^{2i} + U \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in F \right\}$$

$$\pi: V \longrightarrow V/U$$

$$p(x) \longmapsto p(x) + U = g(x) + U$$

$\|$

$g(x)$ 由 $p(x)$ 中关于 x 的偶次幂的项之和

定理5.1 设 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ 则

$$V/\ker(\varphi) \simeq \mathrm{im}(\varphi)$$

证: ~~定义~~ 记 $K_\varphi = \ker(\varphi)$, $I_\varphi = \mathrm{im}(\varphi)$

定义: $\bar{\varphi}: V/K_\varphi \longrightarrow I_\varphi$

$$\vec{v} + K_\varphi \longmapsto \varphi(\vec{v})$$

验证良定义: 设 $\vec{v} + K_\varphi = \vec{v}' + K_\varphi$

则 $\vec{v} - \vec{v}' \in K_\varphi \Rightarrow \varphi(\vec{v} - \vec{v}') = \vec{0}_V$

$\Rightarrow \varphi(\vec{v}) = \varphi(\vec{v}')$

$\Rightarrow \bar{\varphi}(\vec{v} + K_\varphi) = \bar{\varphi}(\vec{v}' + K_\varphi)$

$\Rightarrow \bar{\varphi}$ 是良定义的

验证线性 设 $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in V$. $\alpha_1, \alpha_2 \in F$

$$\bar{\varphi}\left(\alpha_1(\vec{v_1} + K_\varphi) + \alpha_2(\vec{v_2} + K_\varphi)\right)$$

$$= \bar{\varphi}\left((\alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2}) + K_\varphi\right) \quad [V/K_\varphi\text{ 中运算}] \quad [\bar{\varphi}\text{ 定义}]$$

$$= \varphi(\alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2})$$

$= \alpha_1 \varphi(\vec{v_1}) + \alpha_2 \varphi(\vec{v_2})$ [φ 线性]

$= \alpha_1 \bar{\varphi}(\vec{v_1} + K_\varphi) + \alpha_2 \bar{\varphi}(\vec{v_2} + K_\varphi)$ [$\bar{\varphi}$ 的定义]

$\bar{\varphi}$ 线性.

验证 $\bar{\varphi}$ 是双射, $\bar{\varphi}$ 显然满射

设 $\bar{\varphi}(\vec{v} + K_\varphi) = \vec{0}_W$

则 $\varphi(\vec{v}) = \vec{0}_W \Rightarrow \vec{v} \in K_\varphi \Rightarrow$

$$\vec{v} + K_\varphi = \vec{0}_V + K_\varphi$$

$\boxtimes$

$\bar{\varphi}$ 是单射

推论5.1 设 U_1, U_2 是 V 的子空间

则 $$U_1/(U_1 \cap U_2) \simeq (U_1+U_2)/U_2$$

证: $\varphi: U_1 \longrightarrow U_1 + U_2$ 嵌入

$\vec{u_1} \longmapsto \vec{u_1}$

$\pi: U_1 + U_2 \longrightarrow (U_1+U_2)/U_2$

商映射

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, dashed] & (U_1+U_2) \arrow[d, "\pi"] \\ & (U_1+U_2)/U_2 \end{tikzcd}$$

$\rho = \pi \circ \varphi$

ρ 是线性的 (定理?)

设 $\vec{v} = U_1 \cap U_2$

$\rho(\vec{v}) = \vec{v} + U_2 = \vec{0} + U_2 \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \ker(\varphi)$

$\rho(\vec{u}) = \vec{u} + U_2 \in \vec{0} + U_2$

设 ~~$\vec{v} + U$~~ $\vec{u} \in \ker(\rho)$

$\Rightarrow \vec{u} \in U_2 \longrightarrow \vec{u} \in U_1 \cap U_2$

$\Rightarrow U_1 \cap U_2 = \ker(\varphi)$

由定理5.1

$$U_1/(U_1 \cap U_2) \simeq (U_1+U_2)/U_2$$

例: 设 $U_1 = \langle 1, x, x^3, x^5, \dots \rangle$

$U_2 = \langle x, x^2, x^4, \dots \rangle$

是 $V = F[x]$ 的两个子空间

$U_1 \cap U_2 = \langle 1 \rangle$ $\quad U_1 + U_2 = V$

$U_1/U_1\cap U_2=\{(\sum_{i=0}^{n}\alpha_i x^{2i+1})+F \mid n\in\mathbb{N},\ \alpha_i\in F\}$

$(U_1+U_2)/U_2=\{(\sum_{i=0}^{n}\alpha_i x^{2i+1})+U \mid n\in\mathbb{N},\ \alpha_i\in F\}$

§6 基底与维数

定义：设 $S\subset V$ 非空. 如果 S 中任意有限多个元素都线性无关，则称 S 是线性无关集. 否则称 S 为线性相关集

定义：设 $T\subset V$. $S\subset T$ 且 S 是线性无关集. 如果 $\forall \vec{v}\in T$. $S\cup\{\vec{v}\}$ 是线性相关集. 则称 S 是 T 中的极大线性相关集

例：设 $\vec{v}\in V$ 且 $\vec{v}\neq\vec{0}$，则 $\{\vec{v}\}$ 是线性无关集. 任何含有 $\vec{0}$ 的集合是线性相关集

例 设 $V=F[x]$，$T=\{x,x^3,2x^3+x\}$

$S_1=\{x,x^3\}$，$S_2=\{x,2x^3+x\}$，$S_3=\{x^3,2x^3+x\}$

当 $\mathrm{char}(F)\neq 2$，S_1,S_2,S_3 ~~都是~~ T 中极大线性无关集. 当 $\mathrm{char}(F)=2$，时 S_2 不是.

$\{1,x^2,\dots,x^{2n}\dots\}$ 是 V 中线性无关集

$\{1,x,x^2,\dots\}$ 是 V 中极大线性无关集

注 设 $T\subset V$ 且 T 中有非零向量，则 T 有线性无关集. 证明~~需要~~超限归纳法

定义：V 中的极大线性无关集称为 V 中的基底 (basis)

引理 6.1 (线性表示引理)

设 $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k,\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_m\in V$，$\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_m\in\langle\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k\rangle$

如果 $m>k$ 且 $\vec{u}_1,\dots\vec{u}_m\in\langle\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k\rangle$

则 $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_m$ 线性相关.

证：设 $\vec{u}_i=\sum_{j=1}^{k}a_{ij}\vec{v}_j \quad i=1,2,\cdots m$

$$(\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_m)=(\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_k)\underbrace{\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{m1}\\ a_{12} & \cdots & a_{m,2}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{1k} & \cdots & a_{m,k}\end{pmatrix}}_{A_{k\times m}}$$

设 $\alpha_1,\cdots\alpha_m\in F$ ~~某常~~

$$\alpha_1\vec{u}_1+\cdots+\alpha_m\vec{u}_m=(\vec{u}_1,\cdots\vec{u}_m)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}=(\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_k)A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}$$

~~考虑方程组~~ $$A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \qquad (*)$$

$\because k<m \quad \therefore$ 由 $(*)$ 有非零解 $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}$

于是由 $A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow \alpha_1\vec{u}_1+\cdots+\alpha_m\vec{u}_m=\vec{0}$

$\Rightarrow \vec{u}_1,\cdots\vec{u}_m$ 线性相关 □

定理6.1 设 $B=\{\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_n\}$ 是 V 的一组有限基

(i) $\forall\vec{v}\in V$. $\exists!$ $\alpha_1\cdots\alpha_n\in F$ 使得

$$\vec{v}=\alpha_1\vec{b}_1+\cdots+\alpha_n\vec{b}_n$$

(称 $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ 是 $\vec{v}$ 在 $\vec{b}_1,\cdots\vec{b}_n$ 下的坐标)

(ii) 设 $C\subset V$ 是另一组基 则 $\mathrm{card}(C)=n$

(iii) 设 $S\subset V$ 是线性无关集. 则 V 中有基底 T 包含 S.

(称 (iii) 为基扩充性质)

证：(i) $\because$ B 是基底 (极大线性无关集)

$\therefore \vec{v},\vec{b}_1,\cdots\vec{b}_n$ 线性相关

由本学期讲义2 P13 性质④. (i)成立

(ii) 因为 $V=\langle B\rangle$ (由(i)可得)

所以 $\forall\vec{c}\in C$, $\vec{c}\in\langle B\rangle$

于是 $\mathrm{card}(C)\le n$ (线性表示引理)

交换 B 和 C 得 $n\le\mathrm{card}(C)$