回忆 本学期讲义2 P13. 事实④

设 $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_k\in V$ 线性无关且 $\vec{v},\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_k$ 线性相关. 则 $\exists!\ \beta_1,\cdots\beta_k\in F$. 使得

$$\vec{v}=\beta_1\vec{v}_1+\cdots+\beta_k\vec{v}_k=(\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_k)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_k\end{pmatrix}$$

引理6.2 设 $T\subset V$ 是有限子集, $S\subset T$ 是线性无关子集. 则 T 中有极大线性无关子集 B 使得 $S\subset B$

证: 如果 S 已经极大, 则引理成立. 否则 $\exists\ \vec{v}_1\in T\backslash S$ 使得 $S_1:=S\cup\{v_1\}$ 是线性无关集. 如果 S_1 极大, 则令 $B=S_1$, 引理成立. 否则 ~~复~~ 重复上述步骤, 得到线性无关集 $S_2\supset S_1$, 因为 T 有限, 所以上述步骤有限次终止于一个极大线性无关集 $B\supset S$ □

引理6.3 设 $T\subset V$, B 是 T 中极大线性无关集. 则 $\langle T\rangle=\langle B\rangle$

证: $\because B\subset T$ $\therefore \langle B\rangle\subset\langle T\rangle$

反之 设 $\vec{v}\in\langle T\rangle$. 则 $\exists\ \vec{t}_1,\cdots\vec{t}_s\in T$, $\alpha_1\cdots\alpha_s\in F$ 使得 $\vec{v}=\alpha_1\vec{t}_1+\cdots+\alpha_s\vec{t}_s=(\vec{t}_1,\cdots,\vec{t}_s)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}$

$\because \{\vec{t}_i\}\cup B$ 线性相关 ~~使得~~ $\vec{b}_1,\cdots\vec{b}_k\in B$

$\therefore \exists\ \beta_{1i},\cdots\beta_{ki}$.

$$\vec{t}_i=(\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_k)\begin{pmatrix}\beta_{1i}\\ \vdots\\ \beta_{ki}\end{pmatrix}$$

注意: 总可以取 k 使得与 $i\in\{1,\cdots s\}$ 无关 (因为 $i\in\{1,\cdots s\}$ 是有限集)

$$(\vec{t}_1,\cdots\vec{t}_s)\ \cancel{\Rightarrow \vec{v}}=(\vec{b}_1,\cdots\vec{b}_k)\underbrace{\begin{pmatrix}\beta_{11}&\cdots&\beta_{1s}\\ \vdots&&\vdots\\ \beta_{k1}&&\beta_{ks}\end{pmatrix}}_{B}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}=(\vec{b}_1,\cdots\vec{b}_k)B\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}\in\langle B\rangle$$

$$\Rightarrow \langle T\rangle\subset\langle B\rangle.$$ □

①

定理 6.1 设 $V \neq \{\vec{0}\}$，$T \subset V$ 有限集且 $V = \langle T \rangle$

(i) V 有基底 B 且 B 有限

(ii) 设 $B = \{\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_n\}$ 是 V 的一个基底．

则 $\forall \vec{v} \in V$．$\exists!$ $\beta_1, \cdots \beta_k \in V$ 使得

$$\vec{v} = \beta_1 \vec{b}_1 + \cdots + \beta_n \vec{b}_n = (\vec{b}_1, \cdots \vec{b}_n) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

(iii) 设 $C \subset V$ 是另一个基底．则

$$\mathrm{card}(C) = n.$$

(iv) 设 S 是 V ~~的一个极~~ 线性无关集．则

存在 V 的基底包含 S

证：(i) 由引理 6.2 T 中有极大线性无关集 B．因为 $V = \langle T \rangle$，所以

$$V = \langle B \rangle \quad [\text{引理 } 6.3]$$

于是 $\forall \vec{v} \in V \setminus B$ $\{\vec{v}\} \cup B$ 是线性相关集

(i)：$\Rightarrow$ B 是 V 中极大线性无关集

(ii) 因为 B 是极大线性无关集

所以 $\vec{v}, \vec{b}_1, \cdots \vec{b}_n$ 线性相关

由基本事实 $\exists!$ $\beta_1 \cdots \beta_k$ 使得

$$\vec{v} = \beta_1 \vec{v}_1 + \cdots + \beta_k \vec{v}_k$$

(iii) $\forall \vec{c} \in C$ $\vec{c} \in \langle \vec{b}_1, \cdots \vec{b}_n \rangle$

由引理 6.1（线性表示引理）

$$\mathrm{card}(C) \leq n,$$

否则 C 中向量线性相关．

互换 B 和 C 的位置得

$$\mathrm{card}(C) \geq n$$

于是 $\mathrm{card}(C) = n$.

(iv) ~~S 设 $S' = S \cup T$~~

~~则 S'~~

由引理 6.1．S 有限，于是 $S \cup T$ 有限

由引理 6.2．$S \cup T$ 中有极大线性无关组 D 且 $S \subset D$

$\because$ $V = \langle T \rangle = \langle S \cup T \rangle \subset$

$\therefore$ $V = \langle D \rangle$（引理 6.3）于是 D 是 V 的基

$\square$

注：定理6.1(i)说明 有限生成的线性空间必有有限基

(ii) 中 $\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$ 称为 $\vec{v}$ 在 B 下的坐标

(iii) 将帮助我们定义维数

(iv) 将被称为基扩充性质

~~定义：设 $V\neq\{\vec{0}\}$ 且由有限多个向量生成~~
~~令 $B=\{\vec{b}_1,\cdots\vec{b}_n\}$ 是 V~~

定义：~~(i)~~ 如果 $V=\{\vec{0}\}$，则 V 的维数定义为零.

(ii) 如果 $V\neq\{\vec{0}\}$ 且由有限多个向量生成

$B=\{\vec{b}_1,\cdots\vec{b}_n\}$ 是 V 的一组基，则

V 的维数定义为 n

(iii) 如果 V 中有无限的线性无关集

则 V 的维数定为 ∞

记号 V 的维数记为 $\dim_F V$ 或 $\dim V$

例：设 $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\vec{v}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\vec{v}_3=\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中

求 $V=\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\rangle$ 的一组基和维数

解：法1 先基底，后维数

$\{\vec{v}_1\}$ 线性无关集　　设 $\alpha_1,\alpha_2\in F$

$\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2=\vec{0} \Rightarrow \alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

由 $2\alpha_1=0 \Rightarrow \alpha_1=0 \Rightarrow \alpha_2=0$.

于是 $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ 线性无关

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in F$

$\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\alpha_3\vec{v}_3=\vec{0}$

$\Rightarrow \alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}1&1&2\\2&0&2\\3&1&4\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$　　(*)

$\because \operatorname{rank}(A)=2 \therefore$ (*) 有非零解

$\Rightarrow \vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ 线性相关 $\Rightarrow \{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ 是 V 的基　于是 $\dim V=2$.

法2 先维数、后基底

设 $A=(\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3})$，则 $V=V_c(A)$.

于是 $\dim V=\mathrm{rank}(A)$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&0&2\\3&1&4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-2&-2\\0&-2&-2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-2&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathrm{rank}(A)=2 \Rightarrow \dim V=2$

$\because \vec{v_1},\vec{v_2}$ 线性无关 $\therefore \{\vec{v_1},\vec{v_2}\}$ 是基底

例：求 $SM_n(F)$ 的维数和基底

解：法1 $A\in M_n(F)$ 共有 n^2 个参数（a_{ij}）待定

$A\in SM_n(F) \iff a_{ij}-a_{ji}=0$，$i,j\in\{1,\dots,n\}$，$i\neq j$

于是 $a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}$，$a_{ij}$，$(i<j)$ 可以任取，当它们选定后 a_{ij} $(i>j)$ 就确定了

所以 $\dim(SM_n(F))$

$$\begin{pmatrix}\cdot&\cdots&\cdot\\&\ddots&\vdots\\\text{确定}&&\cdot\end{pmatrix}=1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

法2 向量化 把 A 看成 $1\times n^2$ 列向量 排序，a_{ij} 和 a_{ji}

前 n 个坐标是 $a_{11},\dots a_{nn}$.

相邻 $i,j\in\{1,\dots,n\}$，$i<j$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0&1&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&-1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&-1\end{pmatrix}}_{B}\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{22}\\a_{33}\\a_{12}\\a_{21}\\a_{13}\\a_{31}\\a_{32}\\a_{23}\end{pmatrix}=\vec{0}_3$$

则 A 满足 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个（线性独立）方程．其矩阵每行部非零，每列中只有一个非零坐标

于是 系数矩阵 B 行满秩

$$\mathrm{rank}(B)=\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\dim(SM_n(F))=n^2-\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

自己验证：$SM_n(F)$ 的基底是

$L_{11}, L_{22}, \cdots L_{nn}$

$L_{ij}-L_{ji},\ 1\le i<j\le n$

例：设 $A\in F^{m\times n}$，$\cancel{X\in F^{n\times k}}$

$V=\{X\in F^{n\times k} \mid AX=O_{m\times k}\}$

是 $F^{n\times k}$ 的子空间，求 $\dim V$

解：验证 V 是子空间

设 $\alpha,\beta\in F$. $X, Y\in V$

$$A(\alpha X+\beta Y)=\alpha(AX)+\beta(AY)$$
$$=\alpha O_{m\times k}+\beta O_{m\times k}$$
$$=O_{m\times k}$$

$\Rightarrow \alpha X+\beta Y$ 是子空间

设 $X=(\vec{X}^{(1)},\cdots \vec{X}^{(k)})$

$AX=O_{m\times k}=(A\vec{X}^{(1)},\cdots A\vec{X}^{(k)})$ (K)

设 $\vec{0}_m=\underbrace{\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}}_{m}$

(1) 等价于

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ & & & A\end{pmatrix}}_{B_{(mk\times nk)}}\begin{pmatrix}\vec{X}^{(1)}\\ \vec{X}^{(2)}\\ \vdots\\ \vec{X}^{(k)}\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\vec{0}_m\\ \vec{0}_m\\ \vdots\\ \vec{0}_m\end{pmatrix}}_{k}$$

$\mathrm{rank}(B)=k\,\mathrm{rank}(A)$

$\dim V=nk-k\,\mathrm{rank}(A)=k(n-r_A)$

其中 $r_A=\mathrm{rank}(A)$. ☒

6

例：设 $T=\{x^2+1,\ x^2+2,\ x^3+x^2+3,\ x^3+1\}\subset F[x]$

$V=\langle T\rangle$. 求 V 的一组基和 $\dim_F V$

解：$S_1=\{x^2+1\}$

$\alpha_1(x^2+1)+\alpha_2(x^2+2)=0$

$\Longleftrightarrow \alpha_1+\alpha_2=0$ 且 $\alpha_1+2\alpha_2=0$

即 $\underbrace{\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}=0$

$\mathrm{rank}(A)=2 \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=0 \Rightarrow$

$S_2=\{x^2+1,\ x^2+2\}$ 线性无关

$S_3=\{x^2+1,\ x^2+2,\ x^3+x^2+3\}$ 显然线性无关

$(\because\ x^3+x^2+3$ 次数为 3)

$\alpha_1(x^2+1)+\alpha_2(x^2+2)+\alpha_3(x^3+x^2+3)+\alpha_4(x^3+1)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha_3+\alpha_4=0\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0\\ \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+\alpha_4=0\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 有非零解

$\Rightarrow$ 线性相关

$\Rightarrow S_3$ 是 V 的基

$\dim V=3$

$$\cancel{\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&1&1&0\\1&2&3&1\end{pmatrix}}_{B}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{pmatrix}=0}$$

$p(x)=p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3$

$$B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\2&0&1&0\\3&0&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\leftarrow x^2+1\\\leftarrow x^2+2\\\leftarrow x^3+x^2+3\\\leftarrow x^3+1\end{matrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&-1&0\\0&0&-2&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\mathrm{rank}(B)=3 \Rightarrow \dim V=3$

$x^2+1,\ x^2+2,\ x^3+x^2+3$ 是基.

定理6.2. 设 V, W 是有限维线性空间 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 是 V 的一组基. 对∀ $\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_n\in W$

则存在唯一 $\varphi\in\mathrm{Hom}(V,W)$ 使得

$\varphi(\vec{e}_i)=\vec{w}_i$. $i=1,2,\dots n$

证明：存在性：

定义 $\varphi: V \longrightarrow W$

$$(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} \longmapsto (\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

其中 $\alpha_1 \dots \alpha_n \in F$. 由定理6.1 (ii). φ 良定义的

$$\vec{e}_k = (\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\end{array}\!\!-k \qquad \varphi(\vec{e}_k) = \vec{w}_k,\ k=1,2,\dots n$$

设 $\vec{u} = (\vec{e}_1,\dots\vec{e}_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$, $\vec{v} = (\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$

$$\varphi(\vec{u}+\vec{v}) = \varphi\left((\vec{e}_1,\dots\vec{e}_n)\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{pmatrix}\right)$$

$$= (\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_n)\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{pmatrix}$$

$$= (\vec{w}_1,\dots\vec{w}_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} + (\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_n)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$$

$$= \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$$

类似可证 $\forall \lambda \in F \quad \varphi(\lambda\vec{u}) = \lambda\varphi(\vec{u})$

φ 线性. 存在性成立

唯一性. 设 $\psi \in \mathrm{Hom}(V,W)$ 满足 $\psi(\vec{e}_k) = \vec{w}_k$ ⑦

$k = 1,2,\dots n$.

$$\psi(\vec{u}) = \psi\left((\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\right)$$

$$= \psi(\alpha_1\vec{e}_1 + \dots + \alpha_n\vec{e}_n)$$

$$= \alpha_1\psi(\vec{e}_1) + \dots + \alpha_n\psi(\vec{e}_n)$$

$$= (\psi(\vec{e}_1),\dots,\psi(\vec{e}_n))\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

$$= (\vec{w}_1,\dots\vec{w}_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

$$= \varphi(\vec{u}) \qquad \Rightarrow \varphi = \psi \quad ▢$$

注: 定义线性映射. 只要定义它在基底下的像. 验证两个线性映射是否相同, 只要验证它们在基底下的像是否相同即可.

§7 关于维数的几个公式

在本节中所有线性空间都是有限维的

引理 7.1 设 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. $U \subset V$ 是子空间

则 $\dim U \geqslant \dim(\varphi(U))$

证明 见上学期讲义 7. 命题 3.3. (p. 7)

定理 7.1 $V \simeq W \iff \dim V = \dim W$

证: "$\Rightarrow$" 设 $\varphi: V \to W$ 是线性双射.

$W = \varphi(V) \Rightarrow \dim V \geqslant \dim W$

(由引理 7.1)

$\varphi^{-1}: W \to V$ 也是线性映射 (命题 4.2)

$\varphi^{-1}(W) = V \Rightarrow \dim W \geqslant \dim V$

引理 7.1

于是 $\dim V = \dim W$.

"$\Leftarrow$" 设 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 是 V 的基 $\vec{\varepsilon}_1, \dots \vec{\varepsilon}_n$ 是 W 的基

由定理 6.2 $\exists!$ $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ 满足

$\varphi(\vec{e}_k) = \vec{\varepsilon}_k$, $k = 1 \dots n$

$\exists!$ $\psi \in \mathrm{Hom}(W, V)$ 满足 $\psi(\vec{\varepsilon}_k) = \vec{e}_k$, $k = 1 \dots n$

$\varphi \circ \psi(\vec{\varepsilon}_k) = \varphi(\vec{e}_k) = \vec{\varepsilon}_k$

$\varphi \circ \psi \in \mathrm{Hom}(W, W)$ 满足 $\varphi \circ \psi(\vec{\varepsilon}_k) = \vec{\varepsilon}_k$

$\Rightarrow \varphi \circ \psi = id_W$ (定理 6.2 的唯一性)

同理 $\psi \circ \varphi = id_V$ ▨

于是 φ 是双射

定理 7.2. 设 $U \subset V$ 子空间

$U \neq V \iff \dim U < \dim V$

证: "$\Leftarrow$" 由维数的唯一性

"$\Rightarrow$" 设 $\vec{u}_1, \dots \vec{u}_k$ 是 U 的基.

$\because U \neq V$ $\therefore$ $\exists \vec{v} \in V$ 使得

$\vec{v} \in V \setminus U = \langle \vec{u}_1, \dots \vec{u}_k \rangle$

于是 $\{\vec{v}, \vec{u}_1, \dots \vec{u}_k\}$ 线性无关 (基本事实)

由基扩充性质. $\dim V > \dim U$.

定理 7.3 设 $U \subset V$ 是子空间，则

$$\dim V/U = \dim V - \dim U$$

证：设 $U \neq \{\vec{0}\}$. 设：$\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$ 是 U 的一组基

由基扩充性质：$\exists\ \vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n \in V$ 使得

$$\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n$$

是 V 的一组基。由

断言：$\vec{e}_{k+1}+U, \dots, \vec{e}_n+U$ 是 V/U 的一组基

断言的证明：

$\forall\ \vec{v}+U \in V/U$. $\exists\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$. 使得

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{e}_1 + \dots + \alpha_n\vec{e}_n$$

$$\vec{v}+U = [\underbrace{(\alpha_1\vec{e}_1 + \dots + \alpha_k\vec{e}_k)}_{\in U} + (\alpha_{k+1}\vec{e}_{k+1} + \dots + \alpha_n\vec{e}_n)] + U$$

$$= (\alpha_{k+1}\vec{e}_{k+1} + \dots + \alpha_n\vec{e}_n) + U$$

$$= \alpha_{k+1}(\vec{e}_{k+1}+U) + \dots + \alpha_n(\vec{e}_n+U)$$

于是 $V/U = \langle \vec{e}_{k+1}+U, \dots, \vec{e}_n+U \rangle$

设 $\beta_{k+1}, \dots, \beta_n \in F$ 使得

$$\beta_{k+1}(\vec{e}_{k+1}+U) + \dots + \beta_n(\vec{e}_n+U) = \vec{0}+U$$

$$(\beta_{k+1}\vec{e}_{k+1} + \dots + \beta_n\vec{e}_n) + U = \vec{0}+U$$

$\Rightarrow\ \beta_{k+1}\vec{e}_{k+1} + \dots + \beta_n\vec{e}_n \in U$

即 $\exists\ \beta_1, \dots, \beta_k \in F$ 使得

$$\beta_{k+1}\vec{e}_{k+1} + \dots + \beta_n\vec{e}_n = \beta_1\vec{e}_1 + \dots + \beta_k\vec{e}_k$$

$\Rightarrow\ (-\beta_1)\vec{e}_1 + \dots + (-\beta_k)\vec{e}_k + \beta_{k+1}\vec{e}_{k+1} + \dots + \beta_n\vec{e}_n = \vec{0}$

$\Rightarrow\ \beta_{k+1} = \dots = \beta_n = 0$

$\Rightarrow\ \vec{e}_{k+1}+U, \dots, \vec{e}_n+U$ 线性无关

断言成立

于是 $\dim V/U = n-k$.

当 $U = \{\vec{0}\}$ 时，设 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 是 V 的基

类似断言的证明可知 $\vec{e}_1+\{\vec{0}\}, \dots, \vec{e}_n+\{\vec{0}\}$ 是 $V/\{\vec{0}\}$ 的一组基. ◻

推论7.1 设 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. 则

$$\dim(\ker\varphi) + \dim(\mathrm{im}(\varphi)) = \dim V$$

证明: 法1. 见上学期讲义7. 定理7.1 p.9

法2: $V/\ker(\varphi) \simeq \mathrm{im}(\varphi)$ [定理5.1]

$\Rightarrow \dim V/\ker(\varphi) = \dim \mathrm{im}(\varphi)$ [定理7.1]

$\Rightarrow \dim V - \dim\ker(\varphi) = \dim(\mathrm{im}\varphi)$ ☒

推论7.2 设 $U_1, U_2 \subset V$ 是子空间

则 $\dim(U_1+U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$

证: 法1 见上学期~~子数~~课讲义6. p.6

法2 $U_1/(U_1\cap U_2) \simeq (U_1+U_2)/U_2$ [推论5.1]

$\Rightarrow \dim\left(U_1/(U_1\cap U_2)\right) = \dim\left((U_1+U_2)/U_2\right)$ [定理7.1]

$\Rightarrow \dim U_1 - \dim(U_1\cap U_2) = \dim(U_1+U_2) - \dim(U_2)$

[定理7.3] ☒

推论7.3. 设 $U_1, \cdots U_k \subset V$是子空间

则 $\dim(U_1 + \cdots + U_k) \leq \dim U_1 + \cdots + \dim U_k$

证: 对 k 归纳. $k=1$, 显然

设 当 $k-1$ 时 结论成立

推论7.2

$\dim(U_1+\cdots+U_{k-1}+U_k)$

$= \dim(U_1+\cdots+U_{k-1}) + \dim U_k - \dim((U_1+\cdots+U_{k-1})\cap U_k)$

$\leq \dim(U_1+\cdots+U_{k-1}) + \dim U_k$

$\leq \dim(U_1) + \cdots + \dim U_{k-1} + \dim U_k$ (归纳假设)

推论7.4 设 $U_1, \cdots, U_k \subset V$是子空间

则 $U_1 + \cdots + U_k$ 是直和 $\Longleftrightarrow$

$\dim(U_1+\cdots+U_k) = \dim U_1 + \cdots + \dim U_k$

证: "$\Rightarrow$" 对 k 归纳.

当 $k=1$ 时 显然

当设 $k>1$ 且 $k-1$ 时 结论成立

由 命题2.1 (iii)

$(U_1 + \cdots + U_{k-1}) \cap U_k = \{\vec{0}\}$.

由推论7.2

$\dim(U_1+\cdots+U_{k-1}+U_k) = \dim((U_1+\cdots+U_{k-1})+U_k)$

$= \dim(U_1+\cdots+U_{k-1}) + \dim U_k$

$= \dim(U_1)+\cdots+\dim U_{k-1} + \dim U_k$

($\because$ $U_1+\cdots+U_{k-1}$ 仍是直和 $\therefore$ 可用归纳假设)

"$\Leftarrow$" 如果不是直和. 则 $\exists\, i\in\{1,2,\dots k\}$ 使得

$U_i \cap (U_1+\cdots+U_{i-1}+U_{i+1}+\cdots+U_k) \neq \{\vec{0}\}$

(命题2.1 (iii))

不妨设 $i=k$

则 $\dim(U_1+\cdots+U_{k-1}+U_k)$

$= \dim(U_1+\cdots+U_{k-1}) + \dim U_k - \dim((U_1+\cdots+U_{k-1})\cap U_k)$

$< \dim(U_1+\cdots+U_{k-1}) + \dim U_k$

$\leqslant \dim(U_1)+\cdots+\dim(U_{k-1}) + \dim(U_k)$ $\rightarrow\leftarrow$ 矛

例: 设 $\varphi_i \in \mathrm{Hom}(V_{i-1}, V_i)$, $i=1,2,\dots m$

$K_i = \ker\varphi_i$, $I_i = \mathrm{Im}(\varphi_i)$

证明: $\sum_{i=1}^{m}\dim K_i - \sum_{i=1}^{m}\dim(V_i/I_i) = \dim V_0 - \dim V_m$

$\dim K_i + \dim I_i = \dim V_{i-1}$

$\dim(V_i/I_i) = \dim V_i - \dim I_i$

左 $= \sum_{i=1}^{m}(\dim V_{i-1} - \dim I_i) - \sum_{i=1}^{m}(\dim V_i - \dim I_i)$

$= \sum_{i=1}^{m}\dim V_{i-1} - \sum_{i=1}^{m}\dim V_i$

$= (\dim V_0 + \dim V_1 + \cdots + \dim V_{m-1}) - (\dim V_1 + \dim V_2 + \cdots + \dim V_m)$

$= \dim V_0 - \dim V_m$

当 $m=1$ 时, $\varphi\in\mathrm{Hom}(V,W)$

$\dim\ker(\varphi) - \dim W/\mathrm{Im}(\varphi) = \dim V - \dim W$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Im}(\varphi) + \dim W/\mathrm{Im}(\varphi) = \dim W$

例：设 U, V, W 是某个线性空间的~~子空间~~
有限维子空间. 证明：

$$\dim((U+V)\cap W) + \dim(U\cap V) = \dim((V+W)\cap U) + \dim(V\cap W)$$

证：左 $= \dim(U+V) + \dim W - \dim(U+V+W) + \dim(U\cap V)$

$= \dim U + \dim V + \dim W - \dim(U+V+W)$

同理 右 $= \dim V + \dim W + \dim U - \dim(V+W+U)$

$\Rightarrow$ 左 $=$ 右 ▨

§8. 基变换.

设 $\dim V = n < \infty$

$\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$; $\vec{e}'_1, \cdots, \vec{e}'_n$

是 V 的两组基

则 $\vec{e}'_j = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$

其中 $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ 是 $\vec{e}'_j$ 在 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ 下的坐标

其中 $j = 1, 2, \cdots, n$ ⑫

令 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 则

$$(\vec{e}'_1, \cdots, \vec{e}'_n) = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n) A \quad —①$$

同理. $\exists B \in M_n(F)$ 使得

$$(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n) = (\vec{e}'_1, \cdots, \vec{e}'_n) B \quad —②$$

由 ①, ② 可知：

$$(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n) = (\vec{e}'_1, \cdots, \vec{e}'_n) AB$$

设 $C = AB$

$$(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n) = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n) C$$

$\because$ $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ 线性无关

$\therefore$ $C = E \Rightarrow AB = E$

定理 8.1 设 $\dim V = n < \infty$

$\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$; $\vec{e}'_1, \cdots, \vec{e}'_n$

是 V 的两组基

则存在唯一的可逆矩阵 ~~A，使得~~ $A\in GL_n(F)$

$$(\vec{e}_1',\dots,\vec{e}_n')=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)A \quad (*)$$

[称 A 是从 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 到 $\vec{e}_1',\dots,\vec{e}_n'$ 的转换矩阵]

此外从 $\vec{e}_1',\dots,\vec{e}_n'$ 到 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 的转换矩阵为 A^{-1}.

证：由上述计算可知，只需证 A 是唯一的

由 $(*)$ $\vec{A}^{(j)}$ 是 $\vec{e}_j'$ 在 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 的下的坐标，由定理6.1 (ii)，$\vec{A}^{(j)}$ 唯一 $\Rightarrow A$ 唯一 ∎

设 $\vec{v}\in V$

$$\vec{v}=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=(\vec{e}_1',\dots,\vec{e}_n')\begin{pmatrix}\alpha_1'\\ \vdots\\ \alpha_n'\end{pmatrix}$$

$$=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)A\begin{pmatrix}\alpha_1'\\ \vdots\\ \alpha_n'\end{pmatrix}$$

由坐标的唯一性

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\alpha_1'\\ \vdots\\ \alpha_n'\end{pmatrix}$$

于是从 $\vec{v}$ 在 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 下的坐标到 $\vec{e}_1',\dots,\vec{e}_n'$ 下的坐标的变换为

$$\boxed{\begin{pmatrix}\alpha_1'\\ \vdots\\ \alpha_n'\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}}$$

例：设 $V=F^2$

$\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\vec{e}_1'=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2'=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$$(\vec{e}_1',\vec{e}_2')=(\vec{e}_1,\vec{e}_2)\underbrace{\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}}_{A}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$(\vec{e}_1,\vec{e}_2')=(\vec{e}_1,\vec{e}_2)\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 在 $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ 下的坐标是

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

定理8.2. 设 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ 是 V 的一组基

$A \in M_n(F)$

$$(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n) = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n) A$$

则 $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n$ 是 V 的一组基 $\Leftrightarrow A$ 可逆

证："$\Rightarrow$" 定理8.1 已证

"$\Leftarrow$" 设 A 可逆：

$\because \dim V = n \therefore$ 只要证 $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n$ 线性无关

即可.

设 $\alpha_1 \cdots \alpha_n \in F$ 使得

$$(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow (\vec{e}_1, \cdots \vec{e}_n) A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\because \vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n \text{ 线性无关})$$

于是 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. $\square$

例：在 $F[x]^{(3)}$ 中

$p_1 = x(x-1)$, $p_2 = x(x-2)$, $p_3 = x(x-3)+1$

是一组基

$$p_1 = x^2 - x = (1, x, x^2)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p_2 = x^2 - 2x = (1, x, x^2)\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p_3 = x^2 - 3x + 1 = (1, x, x^2)\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(p_1, p_2, p_3) = (1, x, x^2)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A}$$

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow p_1, p_2, p_3$ 是基

14