

§10 双线性型 (bilinear forms)

§10.0 ~~合同变换~~ 对称矩阵对角化

记号: 设 $SM_n(F)$ 是域 F 上 n 阶对称矩阵的集合, 除非特别声明, $\text{char}(F) \neq 2$

问题: 给定 $A \in SM_n(F)$, 求 $P \in GL_n(F)$ 使得 $P^t A P$ 是对角矩阵

例: 当 F 的特征是 2 时, 上述问题可能无解. 设 $F = \mathbb{Z}_2$. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}_2)$$

$$\star \quad \underbrace{\begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}}_{P^t} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}}_P = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} p_{21} & p_{11} \\ p_{22} & p_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 2 p_{11} p_{21} = d_1 \Rightarrow d_1 = 0$$

$\therefore \text{rank}(A) = 2$ 且 A 可逆
 $\therefore \text{rank}(P^t A P) = 2$ 与 $d_1 = 0$ 矛盾: ①

回忆: 设 $i, j \in \{1, \dots, n\}$

E_{ij} 是互换 n 阶单位阵第 i 行和第 j 行得到的矩阵. 称为第一类初等矩阵. 用 E_I 表示第一类初等矩阵的集合.

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ j \\ \vdots \end{matrix}$$

E_{ij} 是对称的

$$E_{ij}^t A E_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{ji} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{2i} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{ni} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ j \\ \vdots \end{matrix} E_{ij}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{ji} & \dots & \textcircled{a_{jj}} & \dots & a_{jz} & \dots & a_{jn} \\ a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & \textcircled{a_{ii}} & \dots & a_{in} \\ a_{ni} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ j \\ \vdots \end{matrix}$$

注: $E_{ij}^t A E_{ij}$ 交换了 a_{ii} 和 a_{jj} 的位置

引理 10.1 设 $A \in SM_n(F)$, $P \in M_n(F)$

则 $P^t A P \in SM_n(F)$

证: $(P^t A P)^t = P^t A^t (P^t)^t = P^t A P$ 证

注: 由此可知: $E_{ij}^t A E_{ij} \in SM_n(F)$

引理 10.2 设 $A \in SM_n(F)$, 其对称线元素不为零, 则存在 $P \in E_I$ 使得 $P^t A P$ 中第一行 $E_{ij}^t A E_{ij}$ 第一列的元素非零

证: 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 且 $a_{kk} \neq 0$. 取 $P = E_{kk}$ 可

则 $E_{kk}^t A E_{kk}$

例: 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} E_{12}^t A E_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

图 4.2: 设 $\alpha \in F$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$

$E_{ij}(\alpha)$ 是把第 j 列行乘以 α 加到第 i 行得到的矩阵, 称为第二类初等矩阵. 其集合记为

$$E_{ij}(\alpha) = \begin{pmatrix} E_{II} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \alpha & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -i \\ \\ -j \\ \\ \end{matrix}$$

也是把第 i 列乘以 α 加到第 j 列得矩阵

$$E_{ij}(\alpha) A = \begin{pmatrix} \vec{A}_1 \\ \vdots \\ \vec{A}_i + \alpha \vec{A}_j \\ \vdots \\ \vec{A}_j \\ \vdots \\ \vec{A}_n \end{pmatrix}$$

$$A E_{ij}(\alpha) = (\vec{A}_1^{(1)}, \dots, \vec{A}_i^{(1)}, \dots, \vec{A}_j^{(1)} + \alpha \vec{A}_i^{(1)}, \dots, \vec{A}_n^{(1)})$$

$$(E_{ij}(\alpha))^t = E_{ji}(\alpha) \in E_{II}$$

$$(E_{ij}(\alpha))^t A E_{ij}(\alpha) = E_{ji}(\alpha) A E_{ij}(\alpha)$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{ji} + \alpha a_{ji} & \dots & a_{ji} + \alpha a_{ji} & \dots & a_{ji} + \alpha a_{ji} & \dots & a_{ji} + \alpha a_{ji} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} E_{ij}(\alpha)$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} + \alpha a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{ji} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{ji} + \alpha a_{ji} & \dots & a_{ji} + \alpha a_{ji} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{ji} + \alpha a_{ji} & \dots & a_{ji} + \alpha a_{ji} & \dots & a_{ji} + \alpha(a_{ji} + a_{ji}) + \alpha a_{ji} & \dots & a_{ji} + \alpha a_{ji} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nj} + \alpha a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

引理 10.3 设 $A \in SM_n(F)$, $E_{ij}(\alpha) \in E_{II}^{\circ}$

(i) $(E_{ij}(\alpha))^t A E_{ij}(\alpha)$ 中第 j 行, 第 i

列元素是 $a_{ji} + \alpha a_{ii}$

(ii) 当 $a_{11} = \dots = a_{nn} = 0$ 时, $\exists P \in E_{II}^{\circ}$ 使得 $P^t A P$ 的对角线元素非零

(考虑还设 $A \neq O_{n \times n}$)

(考虑还设 $A \neq O_{n \times n}$)

证: (i) 由上述计算显然成立

(ii) 不妨设 $a_{ij} \neq 0$, 其中 $i \neq j$

令 $P = \sum E_{ij}(\alpha)$

由上述计算可知

$P^t A P$ 中在 j 行 j 列处的元素是

$$a_{ij} + a_{ji} = 2a_{ij} \neq 0 \quad \square$$

例: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$(E_{12}(1))^t A E_{12}(1)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

定理10.1 设 $A \in M_n(F)$, 则 $\exists L_1, \dots, L_k \in \mathbb{E}_I \cup \mathbb{E}_II$

使得 $(L_1 \dots L_k)^t A (L_1 \dots L_k)$ 是对角阵.

证: 平凡情形. 当 $A = O_{n \times n}$ 时 取 $k=1, L_1 = E = E_{11}$

设 $A \neq O_{n \times n}$. 对 n 归纳.

当 $n=1$ 时 取 $k=1, L_1 = (1)$ 即可

设 $n > 1$ 且定理对 $n-1$ 阶对称矩阵成立. 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$

情形1 $a_{11} \neq 0$

由引理10.3 (i). $\exists L_1, \dots, L_s \in \mathbb{E}_II$ 使得

$$(L_1 \dots L_s)^t A (L_1 \dots L_s)$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$a_{12} + \alpha a_{11} = 0$
 $\Rightarrow$ 求 α 则 a_{21}, a_{12} 消0.

$a_{11} + \alpha a_{11} = 0 \Rightarrow$ 求 α .

(用到 A 对称)

由引理10.1 $B \in SM_{n-1}(F)$.

由归纳假设 $\exists n-1$ 阶初等矩阵 (1类或2类)

$L'_{s+1}, \dots, L'_k$ 使得

$$(L'_{s+1} \dots L'_k)^t B (L'_{s+1} \dots L'_k) = D \text{ 是对角阵}$$

$$\bigwedge_m \begin{bmatrix} \times & & \\ & \times & \\ & & \times \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} \times & & \\ & \times & \\ & & \times \end{bmatrix}_m$$

$$L_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & L'_m & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad m \geq s+1 \dots n$$

则 $L_m \in \mathbb{E}_I \cup \mathbb{E}_II$

$$(L_1 \dots L_s L'_{s+1} \dots L'_k)^t A (L_1 \dots L_s L'_{s+1} \dots L'_k)$$

$$= (L'_{s+1} \dots L'_k)^t (L_1 \dots L_s)^t A (L_1 \dots L_s) (L'_{s+1} \dots L'_k)$$

$$= (L'_{s+1} \dots L'_k)^t \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} (L'_{s+1} \dots L'_k)$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L'_{s+1} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L'_k \end{pmatrix} \right]^t \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L'_{s+1} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L'_k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & (L'_{s+1} \dots L'_k)^t B (L'_{s+1} \dots L'_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \leftarrow \text{对称}$$

$$\begin{cases} (E_{ij})^t A E_{ij} = E_{ij} A E_{ij} \\ (E_{ij}(\lambda))^t A E_{ij}(\lambda) = E_{ij}(\lambda) A E_{ij}(\lambda) \end{cases}$$

例：设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ，求可逆矩阵 P

使得 $P^t A P$ 是对角形矩阵。

证：回忆 $\forall$ 设 $BA = C$ 则

$$B(A|E) = (BA|B) = (C|B)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{3 \\ F_{12}(1)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{对称} \\ F_{12}(1)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{F_{21}(-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (5)$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{对称} \\ F_{12}(\frac{1}{2})}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{F_{31}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{对称} \\ F_{13}(-1)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_{P^t}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

验证:

$$\begin{matrix} P & A & P \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

§10.1 双线性型的定义和基本性质

设: $f: V \times V \rightarrow F$ 是 F 上 n 维线性空间

$$f: V \times V \longrightarrow F \\ (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto f(\vec{x}, \vec{y})$$

满足

$$\forall \alpha, \beta \in F, \vec{z} \in V$$

(6)

$$f(\alpha \vec{x} + \beta \vec{z}, \vec{y}) = \alpha f(\vec{x}, \vec{y}) + \beta f(\vec{z}, \vec{y})$$

$$f(\vec{x} + \alpha \vec{y} + \beta \vec{z}) = \alpha f(\vec{x}, \vec{y}) + \beta f(\vec{x}, \vec{z})$$

例: 则 f 是 V 上的双线性型

$$\text{例: 设 } \det_2: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$\det$ 由行列式的性质可直接验证 $\det_2$

是双线性函数

例: 设 f 是 V 上双线性型

$$(i) \text{ 证: } \forall \vec{x} \in V, f(\vec{0}, \vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{0}) = 0$$

$$(ii) \text{ 设 } \alpha, \beta \in F, \vec{x}, \vec{y} \in V$$

$$\text{展开 } f(\alpha \vec{x}, \beta \vec{y}), f(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y})$$

$$\text{证: } f(\vec{0}, \vec{x}) = f(\vec{0} + \vec{0}, \vec{x}) = f(\vec{0}, \vec{x}) + f(\vec{0}, \vec{x})$$

$$\Rightarrow f(\vec{0}, \vec{x}) = 0$$

$$\text{同理 } f(\vec{x}, \vec{0}) = 0$$

$$(ii) f(\alpha \vec{x}, \beta \vec{y}) = \alpha f(\vec{x}, \beta \vec{y}) = \alpha \beta f(\vec{x}, \vec{y})$$

$$f(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}, \vec{x} + \vec{y}) + f(\vec{y}, \vec{x} + \vec{y})$$

$$= f(\vec{x}, \vec{x}) + f(\vec{x}, \vec{y}) + f(\vec{y}, \vec{x}) + f(\vec{y}, \vec{y})$$

例: 设 $l_1, l_2 \in V^*$ 则

$$f: V \times V \longrightarrow F$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto l_1(\vec{x}) l_2(\vec{y})$$

是双线性型

验证: 设 $\alpha, \beta \in F, \vec{z} \in V$

$$f(\vec{x}, \alpha \vec{y} + \beta \vec{z}) = l_1(\vec{x}) l_2(\alpha \vec{y} + \beta \vec{z})$$

$$= l_1(\vec{x}) (\alpha l_2(\vec{y}) + \beta l_2(\vec{z}))$$

$$= \alpha l_1(\vec{x}) l_2(\vec{y}) + \beta l_1(\vec{x}) l_2(\vec{z})$$

$$= \alpha f(\vec{x}, \vec{y}) + \beta f(\vec{x}, \vec{z})$$

⑦ 可直接验证: $f(\alpha \vec{x} + \beta \vec{z}, \vec{y}) = \alpha f(\vec{x}, \vec{y}) + \beta f(\vec{z}, \vec{y})$

§10.3 双线性型的矩阵表示

设 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 是 V 的一组基

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n, \quad \vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + \dots + y_n \vec{e}_n \in V$$

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = f(x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n, \vec{y})$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i f(\vec{e}_i, \vec{y}) \quad [f \text{ 对第一个变元线性}]$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i f(\vec{e}_i, \sum_{j=1}^n y_j \vec{e}_j)$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n y_j f(\vec{e}_i, \vec{e}_j) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j f(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$$

$$\triangleq A = (f(\vec{e}_i, \vec{e}_j)) = (a_{ij})_{n \times n}$$

$$(x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} y_j \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overset{x_i y_j}{a_{ij}} f(\vec{e}_i, \vec{e}_j) \\ = f(\vec{x}, \vec{y})$$

双线性型 $f(\vec{x}, \vec{y})$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j f(\vec{e}_i, \vec{e}_j) \quad [\text{引入基底坐标}]$$

$$= (x_1 \cdots x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad [\text{引} \lambda A = (f(\vec{e}_i, \vec{e}_j))]$$

~~证~~

定理 10.2. 设 f 是 V 上双线性型.

$\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 是 V 的一组基. ~~证~~

$$\forall \vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \cdots + x_n \vec{e}_n, \vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + \cdots + y_n \vec{e}_n$$

$\exists! A \in M_n(F)$ 使得

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1 \cdots x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

证: 存在性 令 $A = (f(\vec{e}_i, \vec{e}_j))$. 证 (8)

唯一性. 设 $B \in M_n(F)$ 使得

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1 \cdots x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{且 } B = (b_{ij})_{n \times n}$$

$$f(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = (0 \cdots 1 \cdots 0) B \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (0 \cdots 1 \cdots 0, \vec{B}^{(j)}) = b_{ij} \Rightarrow A = B \quad \square$$

证: 由上述定理可知 $A = (f(\vec{e}_i, \vec{e}_j))$ 是双线性型 f 在 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 下的矩阵.

例: 设 $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 y_2 - x_2 y_3$

求 f 在标准基下的矩阵

$$\text{解 } f(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0,$$

$$f(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定理 10.3 设 f 是 V 上双线性型, V 有两组

基底 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$. 且

$$(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) P, \quad P \in GL_n(F)$$

设 f 在 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 下的矩阵为 A

在 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 下的矩阵为 B

则 $B = P^t A P$

特别地. $\text{rank}(B) = \text{rank}(A)$

证 设 $\vec{x}, \vec{y} \in V$

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n = \alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n$$

$$\vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + \dots + y_n \vec{e}_n = \beta_1 \vec{e}_1 + \dots + \beta_n \vec{e}_n$$

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) B \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

由坐标变换公式 (讲义 4, p13)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) P^t A P \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \quad (9)$$

由定理 10.2 $B = P^t A P$, 因为 P 满秩

所以 $\text{rank}(B) = \text{rank}(A)$. $\square$

定义: 设 f 是 V 上的双线性型. A 是 f 在 V 的某组基下的矩阵. 则 f 的秩数为 $\text{rank}(A)$, 记为 $\text{rank}(f)$

注由定理 10.3 可知, f 的秩与基底选取无关.

例: 设 $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \mapsto x_1 y_2 + x_2 y_3 + \dots + x_{n-1} y_n$$

求 $\text{rank}(f)$

解 f 在标准基下矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rank}(A) = n-1$$

$$\Rightarrow \text{rank}(f) = n-1 \quad \square$$

例: 设 f 是 V 上双线性型.

证: $\text{rank}(f)=1 \Leftrightarrow \exists l_1, l_2 \in V^* \setminus \{0\}$

使得 $f(\vec{x}, \vec{y}) = l_1(\vec{x}) l_2(\vec{y})$

证: $\Rightarrow$ 设 V 的一组基是 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$

f 在该基下的矩阵为 A

" $\Leftarrow$ " 设 $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$
 $\vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + \dots + y_n \vec{e}_n$

$$l_1(\vec{e}_i) = \alpha_i, \quad l_2(\vec{e}_i) = \beta_i, \quad i=1, \dots, n$$

$$l_1(\vec{x}) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$l_2(\vec{y}) = \beta_1 y_1 + \dots + \beta_n y_n = (\beta_1, \dots, \beta_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = l_1(\vec{x}) l_2(\vec{y}) = (x_1, \dots, x_n) \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} (\beta_1, \dots, \beta_n)}_A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

所以 $A \equiv f$ 在 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 下的矩阵

$$\therefore l_1, l_2 \in V^* \setminus \{0\}$$

$$\therefore \alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ 不全为零. } \beta_1, \dots, \beta_n \text{ 不全为零}$$

$$\Rightarrow A \neq O_{n \times n} \Rightarrow \text{rank}(A)=1.$$

$\Rightarrow$ 设 $\text{rank}(f)=1$, 则 $\text{rank}(A)=1$ (10)

$$A = \left(\alpha_1 \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \dots, \alpha_n \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \right), \quad \text{其中 } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$$

$\beta_1, \dots, \beta_n \in F$. 都不全为零 [上学期作业题]

$$A = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$$\text{所以 } f(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

$$\text{设 } l_1: V \rightarrow F \in V^* \\ l_1(\vec{e}_i) = \beta_i, \quad i=1, \dots, n$$

$$l_2: V \rightarrow F \in V^* \quad l_2(\vec{e}_i) = \alpha_i, \quad i=1, \dots, n$$

$$l_1 \neq 0, \quad l_2 \neq 0 \quad f(\vec{x}, \vec{y}) = l_1(\vec{x}) l_2(\vec{y}). \quad \square$$

§10.4 矩阵的合同 (congruence)

问题: 设 f 是 V 上双线性型. (11)

找到 V 的一组基使得 f 在该基

下的矩阵尽可能简单

由定理10.3. 可知该问题等价于, 给定

$A \in M_n(F)$. 求 $C \in GL_n(F)$ 使得
 $C^t A C$ 尽可能简单.

定义: 设 $A, B \in M_n(F)$. 如果对 $P \in GL_n(F)$ 使得 $B = P^t A P$, 则称 B 与 A 合同. 记为

$$B \sim_c A$$

验证: $\sim_c$ 是等价关系.

自反: $E^t A E = A \Rightarrow A \sim_c A$

对称: $B \sim_c A \Rightarrow \exists P \in GL_n(F)$ 使得

$$B = P^t A P$$

$$\Rightarrow (P^t)^{-1} B C^{-1} = A$$

$$\Rightarrow (P^{-1})^t B P^{-1} = A \Rightarrow A \sim_c B$$

传递: 设 $A \sim_c B, B \sim_c C$

则 $\exists P, Q \in GL_n(F)$, 使得

$$A = P^t B P, \quad B = Q^t C Q$$

$$\Rightarrow A = P^t Q^t C Q P = (QP)^t C (QP)$$

QP 可逆 $\square$

问题: 给定 $A \in M_n(F)$, 求 $B \in M_n(F)$ (10) (b)

$$A \sim_c B \text{ 使得 } B \text{ 尽可能简单}$$

零尽可能多, 非零元出现尽可能有规律.

§10.5 对称双线性型.

定义: 设 f 是 V 上双线性型. 如果 $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{x})$

则称 f 是 ~~双~~ 对称双线性型

定理 10.4. 设 f 是 V 上双线性型.

则 ~~f 是双线性型~~ 下列命题等价

- (i) f 对称
- (ii) f 在 ~~任意~~ V 的任意基底下的矩阵对称
- (iii) f 在 V 的某组基底下的矩阵对称

证: (i) $\Rightarrow$ (iii). 设 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 是 V 的任意基

f 在 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 下的矩阵是

$$B = (f(\vec{e}_i, \vec{e}_j)) \because f \text{ 对称} \therefore B \text{ 对称}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 显然

(iii) $\Rightarrow$ (i) 设 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 是 V 的一组基.

f 在 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 下的矩阵为 A 且

A 对称. 设 $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$

$\vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + \dots + y_n \vec{e}_n$. 则

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1 \dots x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{y}, \vec{x}) = (y_1 \dots y_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{x}, \vec{y})^t = \left[(x_1 \dots x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right]^t$$

$$= (y_1 \dots y_n) A^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (y_1 \dots y_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad [A \text{ 对称}]$$

$$= f(\vec{y}, \vec{x}) \quad \square$$

定理 10.5 设 f 是对称双线性型.

则 $\exists V$ 的一组基底 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 使得

f 在该基底下的矩阵为对角阵

证 命题 1 设 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 是 V 的一组基 ①

基, A 是 f 在该基下的矩阵为 A .

由定理 10.4, A 对称

由定理 10.1 $\exists P \in GL_n(F)$, 使得

$D := P^t A P$ 为对角阵

由定理 8.2

$$(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) P$$

令 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 是 V 的另一组基

由定理 10.3. 在 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 下的矩阵为 D $\square$

注: 设 $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$

则 f 在 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 下 $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n, \vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + \dots + y_n \vec{e}_n$

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \alpha_1 x_1 y_1 + \dots + \alpha_n x_n y_n$$

称 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 是 f 的一组规范基

定理 10.5 另证: Lagrange 方法.

$$\text{若 } f: V \times V \rightarrow F \\ (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto 0$$

则 f 在任何基下的表示都是零矩阵. 定理成立

设 $\exists \vec{x}, \vec{y} \in V$ 使得 $f(\vec{x}, \vec{y}) \neq 0$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (f(\vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}) - f(\vec{x}, \vec{x}) - f(\vec{y}, \vec{y})) \\ &= \frac{1}{2} (f(\vec{x}, \vec{x}) + f(\vec{x}, \vec{y}) + f(\vec{y}, \vec{x}) + f(\vec{y}, \vec{y}) - f(\vec{x}, \vec{x}) - f(\vec{y}, \vec{y})) \\ &= \frac{1}{2} (f(\vec{x}, \vec{y}) + f(\vec{y}, \vec{x})) = f(\vec{x}, \vec{y}) \quad (\because f \text{ 对称}) \end{aligned}$$

$$\text{证: } \boxed{f(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2} (f(\vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}) - f(\vec{x}, \vec{x}) - f(\vec{y}, \vec{y}))}$$

称为对称双线性型的极化公式

$\because f(\vec{x}, \vec{y}) \neq 0 \therefore \exists \vec{v} \in V$ 使得

$$f(\vec{v}, \vec{v}) \neq 0$$

对 $\dim V = n \mid \exists$ 基

(12)

$n=1$. 显然.

设 $n>1$ 且 $n-1$ 时定理成立
由极化公式 $\exists \vec{e}_1 \in V$ 使得
 $f(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \neq 0$

$$\text{令 } U = \{ \vec{u} \in V \mid f(\vec{u}, \vec{e}_1) = 0 \}$$

$$\varphi: V \rightarrow F \\ \vec{v} \mapsto f(\vec{v}, \vec{e}_1)$$

$$\text{则 } \ker(\varphi) = U. \quad \because f(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \neq 0 \\ \therefore \dim(\text{im}(\varphi)) = 1. \Rightarrow \dim U = n-1$$

$$\text{设 } \vec{v} \in U \cap \langle \vec{e}_1 \rangle \text{ 则 } \vec{v} = \alpha \vec{e}_1$$

$$\text{且 } \varphi(\alpha \vec{e}_1) = \alpha \varphi(\vec{e}_1) = \alpha f(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 0$$

由推论 7.4 和命题 2.1

$$V = U \oplus \langle \vec{e}_1 \rangle$$

$$\text{设 } g: U \times U \rightarrow F \\ (\vec{x}', \vec{y}') \mapsto f(\vec{x}', \vec{y}')$$

则 g 是 U 上的双线性型. 由题可知
假设可知: $\exists U$ 的基底 $\vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ 使得

g 在该基下的矩阵 D' 是对角形
换言之 $g(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = f(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0,$

$$i, j \in \{2, \dots, n\}$$

由 U 的定义可知. $f(\vec{e}_i, \vec{e}_1) = 0, i=2, \dots, n$

由 f 对称可知 $f(\vec{e}_1, \vec{e}_i) = 0, i=2, \dots, n.$

于是 f 在 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ 下的矩阵

是对角阵

证: $\because \langle \vec{e}_1 \rangle + \underbrace{\langle \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle}_U$ 是直和

$\therefore \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ 是 U 的基

例: 求: $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (B)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 y_2 + x_1 y_3 + x_2 y_1 + x_3 y_3$$

$$x_3 y_1 + x_3 y_2 \text{ 无}$$

的规范基和规范型

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, x_2, x_3) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

第一步 找 $\vec{e}_1 \in \mathbb{R}^3$ 使得 $f(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \neq 0$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = (1, 1, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1, 1, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0$$

第二步 求 $U = \ker(f(\vec{x}, \vec{e}_1))$

$$f(\vec{x}, \vec{e}_1) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = x_1 + x_2 + 2x_3$$

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\vec{u}_1, \vec{u}_2$$

设 $g: U \times U \rightarrow F$
 $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto f(\vec{x}, \vec{y})$

g 在 $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ 下的基是

$$\begin{pmatrix} g(\vec{u}_1, \vec{u}_1) & g(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \\ g(\vec{u}_2, \vec{u}_1) & g(\vec{u}_2, \vec{u}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\vec{u}_1, \vec{u}_1) & f(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \\ f(\vec{u}_2, \vec{u}_1) & f(\vec{u}_2, \vec{u}_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

在 U 中找 $\vec{u}$ 使得 $g(\vec{u}, \vec{u}) \neq 0$

由 $\vec{u}_1$ 即可

求 $\ker(g(\vec{x}, \vec{u}_1))$

$$(x_1, x_2) \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_1, x_2) \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2) \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

即 $\langle \vec{u}_1 - \vec{u}_2 \rangle$

$$\text{设 } \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_P$$

$$P^t A P$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

f 在 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 下规范式

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$$

$$\vec{y} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3$$

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = 2\alpha_1\beta_1 - 2\alpha_2\beta_2 - 2\alpha_3\beta_3$$