①

例：求 $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2$$

的规范基和对应的规范型.

第一步 把 f 写成矩阵形式

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, x_2, x_3) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

第二步 找 $\vec{\varepsilon}_1 \in \mathbb{R}^3$ 使得 $f(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_1) \neq 0$

设 $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\because f(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = f(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = f(\vec{e}_3, \vec{e}_3) = 0$

$\therefore$ 要找 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 之外的元素

设 $\vec{\varepsilon}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$f(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_1) = (1, 1, 0) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (1, 1, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

第三步 求 $U = \ker(f(\vec{x}, \vec{\varepsilon}_1))$ 的组基

$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$

$$f(\vec{x}, \vec{\varepsilon}_1) = (x_1, x_2, x_3) A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 + x_2 + 2x_3$$

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ 的解空间

$$U = \left\langle \underset{\vec{u}_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\vec{u}_2}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

第四步 降维

$$g: U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\vec{x}', \vec{y}' \mapsto f(\vec{x}', \vec{y}')$$

求 g 在 $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ 下的矩阵

$$\begin{pmatrix} g(\vec{u}_1, \vec{u}_1), & g(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \\ g(\vec{u}_2, \vec{u}_1) & g(\vec{u}_2, \vec{u}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\vec{u}_1, \vec{u}_1), & f(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \\ f(\vec{u}_2, \vec{u}_1), & f(\vec{u}_2, \vec{u}_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2, & -4 \end{pmatrix}$$

第二步，求 $\vec{\varepsilon}_2 \in U$ 使得

$$g(\vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_2) \neq 0$$

取 $\vec{\varepsilon}_2 = \vec{u}_1$ 即可

第三步．求 $U = \ker(g(\vec{x}, \vec{\varepsilon}_2))$

设 $\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2$

$$(x_1, x_2)\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2x_1 - 2x_2 = 0$$

$x_1 + x_2 = 0$．解空间 $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$U = \langle \vec{u}_1 - \vec{u}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\vec{\varepsilon}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

规范基 $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3$

矩阵

$$\begin{pmatrix} f(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_1) & & 0 \\ & f(\vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_2) & \\ 0 & & f(\vec{\varepsilon}_3, \vec{\varepsilon}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & & 0 \\ & -2 & \\ 0 & & -2 \end{pmatrix}$$

基变换：

$$(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P}$$

$$P^tAP = \begin{pmatrix} 2 & & 0 \\ & -2 & \\ 0 & & -2 \end{pmatrix}$$

总结：

定理 10.6 设 f 是 V 上双线性型，A 是 f 在 V 的基底 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 下的矩阵

(i) 设 B 是 f 在 V 的基底 $\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n$ 下的矩阵

则 $A \sim_c B$。更准确地说：

设从 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 到 $\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n$ 的转换矩阵为 P

则 $B = P^tAP$

(ii) 设 $A \sim_c \cancel{B}$ C，则 C 是 f 在 V 的某组基下的矩阵．更准确地说

设 $C = Q^tAQ$，$Q \in GL_n(F)$

则 C 是 f 在基底

$$(\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n) = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n) Q$$ 下的矩阵

证：(i) 定理10.3

(ii) 设：$\vec{x}, \vec{y} \in V$

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \cdots + x_n \vec{e}_n = x_1' \vec{\varepsilon}_1 + \cdots + x_n' \vec{\varepsilon}_n$$

$$\vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + \cdots + y_n \vec{e}_n = y_1' \vec{\varepsilon}_1 + \cdots + y_n' \vec{\varepsilon}_n$$

则 $$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, \cdots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1', \cdots, x_n') Q^t A Q \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$$

$$= (x_1', \cdots, x_n') C \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ C 是 f 在 $\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n$ 下的矩阵 (命题10.2)

即

双线性型
在不同基底下
的矩阵 $\Longleftrightarrow$ 矩阵合同

当 $A \in SM_n(F)$

$$A \sim_c \text{对角矩阵} \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

当 f 是对称双线性型时

f 有规范基和规范型

$$\alpha_1 x_1 y_1 + \cdots + \alpha_n x_n y_n$$

两种方法.

$$A \sim_c \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$$ [对称消元法]

$f \rightarrow$ 规范基规范型 [降维法]

§11. 二次型

§11.1 二次型的来源

研究 $F[x_1,\dots,x_n]$ 中的一个二次齐次多项式

$$p(x_1,\dots,x_n)=a_{11}x_1^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+\sum_{1\le i<j\le n}a_{ij}x_ix_j,\quad a_{11},\dots,a_{nn},\ a_{ij}\in F$$

(对称化)
$$=a_{11}x_1^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+\sum_{1\le i\lneq j\le n}\frac{a_{ij}}{2}x_ix_j$$
$$\sum_{1\le j<i\le n}\frac{a_{ij}}{2}x_jx_i$$

令 $b_{ii}=a_{ii},\quad i=1,\dots,n$

$b_{ij}=\dfrac{a_{ij}}{2}\quad 1\le i<j\le n$

$b_{ji}=\dfrac{a_{ij}}{2}\quad 1\le i<j\le n$

则 $p(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n b_{ij}x_ix_j$

例：$x_1^2+2x_2^2+3x_1x_2$

$$=x_1^2+2x_2^2+\frac{3}{2}x_1x_2+\frac{3}{2}x_2x_1$$
$$=(x_1,x_2)\underbrace{\begin{pmatrix}1&\frac{3}{2}\\ \frac{3}{2}&2\end{pmatrix}}_{A\to\text{对称}}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

一般情形

$$p(x_1\dots x_n)=(x_1,\dots,x_n)\underbrace{\begin{pmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\ &\vdots&\\ b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{pmatrix}}_{B}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

B 对称

设 $f:\ \cancel{V\times V}\ F^n\times F^n\longrightarrow F$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\longmapsto(x_1\dots x_n)B\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

则 f 是对称双线性型

$p(x_1,\dots x_n)=f(\vec{x},\vec{x})$.

于是任何一个 ~~二次~~ 齐二次 n 元多项式

对应一个对称矩阵

§11.2 二次型的定义和基本性质

定义：设 V 是 F 上 n 维线性空间

如果 $q: V \to F$ 满足

(i) $\forall \vec{v} \in V$, $q(-\vec{v}) = q(\vec{v})$

(ii) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}\left(q(\vec{x}+\vec{y}) - q(\vec{x}) - q(\vec{y})\right)$$

是 V 上的对称双线性型．则称

q 是 V 上的二次型 (quadratic forms)

称 f 是 q 的配极， f 的秩

称为 q 的秩 记做 $\mathrm{rank}(q)$.

命题11.1 设 q 是 V 上的二次型.

$f(\vec{x}, \vec{y})$ 是 q 的配极．则

$$\forall \vec{x} \in V \quad q(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x})$$

证：由上述定义中 (ii) 可知

$$f(\vec{x}, -\vec{x}) = \frac{1}{2}\left(q(\vec{0}) - q(\vec{x}) - q(-\vec{x})\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(q(\vec{0}) - 2q(\vec{x})\right) \quad [\text{上述定义中(i)}]$$

令 $\vec{x} = \vec{0}$ 可知

$0 = f(\vec{0}, \vec{0}) = q(\vec{0})$. 即 $q(\vec{0}) = \vec{0}$

再注意到 $f(\vec{x}, -\vec{x}) = -f(\vec{x}, \vec{x})$

于是 $-f(\vec{x}, \vec{x}) = -q(\vec{x}) \Rightarrow q(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x})$ 因

命题11.2. 设 f 是 V 上的对称双线性型

令 $q(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x})$ 则 q 是 V 上

的二次型 且 q 的配极是 f

证：首先 $q(-\vec{x}) = f(-\vec{x}, -\vec{x}) = (-1)^2 f(\vec{x}, \vec{x})$

$$= f(\vec{x}, \vec{x}) = q(\vec{x})$$

其次 由极化公式：

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}\left(f(\vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}) - f(\vec{x}, \vec{x}) - f(\vec{y}, \vec{y})\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(q(\vec{x}+\vec{y}) - q(\vec{x}) - q(\vec{y})\right). \quad \boxtimes$$

推论11.1 设 g 是 V 上二次型. $\alpha\in F$, $\vec{x}\in V$

则 $g(\alpha\vec{x})=\alpha^2 g(\vec{x})$

证: 设 f 是 g 的配极

$g(\alpha\vec{x}) = f(\alpha\vec{x},\alpha\vec{x})=\alpha^2 f(\vec{x},\vec{x})=\alpha^2 g(\vec{x})$ ▨

例: 设 $p\in F[x_1,\dots,x_n]$ 是齐二次的

由 §11.1 可知 $\exists$ 对称矩阵 $A\in M_n(F)$

使得

$$p(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

设 g: $F^n \longrightarrow F$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \longmapsto (x_1,\dots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

则 g 是 F^n 上二次型 且

$g\left(\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\right)=p(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ $\forall\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\in F^n$ 由此可以把

p 看成 F^n 上的二次型.

§11.3 二次型的规范基和规范型

~~定理11.1 设 g 是 V 上的二次型. 则 $\exists$ V 的一组基 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$~~

定义: 设 g 是 V 上的二次型. f 是 g 的配极. $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 是 V 的一组基

则 f 在 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 下的矩阵, 也称为

g 在 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 下的矩阵

注: 设 f 在 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 下的矩阵是 A

$\vec{x}=x_1\vec{e}_1+\dots+x_n\vec{e}_n\in V$

$$g(\vec{x})=(x_1,\dots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

特别地 g 的矩阵是对称的.

例：设 $g: F^3 \to F$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1x_2 + x_3^2 + 3x_2x_3$$

求 g 在标准基下的矩阵

解：g 的配极是 $\frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1 + x_3y_3 + \frac{3}{2}x_2y_3 + \frac{3}{2}x_3y_2$

$f(x,y) = \frac{1}{2}(g(x+y) - g(x) - g(y)) = \frac{1}{2}((x_1+y_1)(x_2+y_2) + (x_3+y_3)^2 + 3(x_2+y_2)(x_3+y_3))$.

$\cancel{x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + y_1y_2 + x_3^2 + 2x_3y_3 + y_3^2 + 3x_2x_3 + 3x_3y_2 + 3x_2y_3 + 3y_2y_3}$

$\cancel{- x_1x_2 - x_3^2 - 3x_2x_3}$

$\cancel{- y_1y_2 - y_3^2 - 3y_2y_3}$.

g 的矩阵是
$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

定理 11.1 设 g 是 V 上的二次型

则存在 V 的一组基 $\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n$ 使

得 g 在该基下的矩阵是对角阵

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 \dots \alpha_n \in F$$

则此时 $\forall \vec{x} = x_1\vec{\varepsilon}_1 + \dots + x_n\vec{\varepsilon}_n \in V$

$$g(\vec{x}) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2.$$

证明：设 f 是 g 的配极

由定理 10.15 f 有规范基 $\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n$

设 f 在该规范基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$g(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x})$

$= (x_1 \cdots x_n)\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$= \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$.

则定理成立

注. $\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n$ 也称 g 的规范基

$\vec{x} = (\vec{\varepsilon}_1 \cdots \vec{\varepsilon}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 记

而 $g(\vec{x}) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$ 称为 g

在该基下的规范型.

例：设 $p = 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1$

是 $\mathbb{R}^3$ 上的二次型. 求 p 的一组规范基

和对应的规范型.

含义：$p: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1$$

是二次型.

解：方法1

$$\phi(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

A是ϕ在 $\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

下的 ~~标准/对~~ 矩阵　由前面的例子可知

$$Q^{t}AQ=\begin{pmatrix}2&&\\&-2&\\&&-2\end{pmatrix}$$

其中 $Q=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$(\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2},\vec{\varepsilon_3})=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})Q$$

$\vec{\varepsilon_i}=\overrightarrow{Q^{(i)}}$, $i=1,2,3$ 是规范基

在其下的规范型是 $2y_1^2-2y_2^2-2y_3^2$

$\cancel{2y_1^2-2y_2^2-2y_3^2}$

其中 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=Q^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

换言之

$$\phi(x_1,x_2,x_3)=2\left(\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}+x_3\right)^2-2\left(\frac{x_1}{2}-\frac{x_3}{2}\right)^2-2x_3^2$$

方法2 （配方）

$$\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=y_3\end{cases}\qquad\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{P}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\phi&=2y_1^2-2y_2^2+2(y_1-y_2)y_3+2(y_1+y_2)y_3\\&=2y_1^2-2y_2^2+4y_1y_3\cancel{+2y_2y_3}\\&=2(y_1^2+2y_1y_3+y_3^2)-2y_3^2-2y_2^2\cancel{+2y_2y_3}\\&=2(y_1+y_3)^2-2y_3^2-2y_2^2\end{aligned}$$

$$\begin{cases}z_1=y_1+y_3\\z_2=y_2\\z_3=y_3\end{cases}\qquad\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{Q}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

$$\phi=2z_1^2-2z_2^2-2z_3^2$$

$$\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=QP^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

§11.4 当 $F=\mathbb{C}$

定理 11.2. 设 g 是 V 上二次型. A 是 g 在 V 的基底 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 下的矩阵

(i) 设 B 是 g 在 V 的基底 $\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_n$ 下的矩阵. 则 $A \sim_c B$. 更准确地说：设从 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 到 $\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_n$ 的转换矩阵为 P 则 $B=P^tAP$

(ii) 设对称矩阵 $A\sim_c C$. 则 C 是 g 在 V 的某组基下的矩阵. 更准确地说. 设 $C=Q^tAQ$ 其中 $Q\in GL_n(F)$, 则 C 是 g 在基底

$$(\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_n)=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)Q$$

下的矩阵

证：利用定理 10.6 和 g 的定义即可.

§11.4 当 $F=\mathbb{C}$

命题 11.3 设 $F=\mathbb{C}$, g 是 V 上二次型 则存在 V 的一组基使得 g 在该基下的矩阵是 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}_{n\times n}$

其中 $r=\operatorname{rank}(g)$.

证 设这组基是 $\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_n$

则 $\forall\ \vec{x}=x_1\vec{\varepsilon}_1+\dots+x_n\vec{\varepsilon}_n\in V$

$$g(\vec{x})=x_1^2+\dots+x_r^2$$

证：由定理 11.1 V 中有基底 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 使得 g 在 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 下的矩阵 $A=(a_{ij})$ 是对角的

$\because \operatorname{rank}(A)=r$

$\therefore A$ 中对角线上恰好有 r 个非零元

设这些非零元是 $a_{i_1i_1},\dots,a_{i_ri_r}$. $i_1<i_2<\dots<i_r$

$$B = E_{1i_r}^t \cdots E_{1i_1}^t\, A\, E_{1i_1} \cdots E_{1i_r} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & O \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ O & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $\alpha_k = a_{i_k i_k}$, $k = 1, 2, \ldots r$. (见§10.0节第一页)

设 $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\alpha_r}} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$.

$\because$ $F = \mathbb{C}$ $\sqrt{\alpha_k}$ 有意义, $k = 1, \cdots r$.

$$Q^t B Q = \begin{pmatrix} 1 & & & & & O \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ O & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $A \sim_c \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

设 $A = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = P^t A P$

$\Rightarrow$ q 在 $(\vec{\varepsilon}_1, \ldots \vec{\varepsilon}_n) = (\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_n) P$

在的矩阵是 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$

$$q(\vec{x}) = (x_1 \cdots x_r\ x_{r+1} \cdots x_n) \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$= x_1^2 + \cdots + x_r^2$ ▨

推论 11.2 设 $A \in SM_n(\mathbb{C})$

则 $A \sim_c \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 其中

$r = \mathrm{rank}(A)$. 进而, 设 $A, B \in SM_n(\mathbb{C})$

则 $A \sim_c B \Leftrightarrow \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$

证: 由命题 11.3 和定理 11.1 直接可得

再由 $\sim_c$ 是等价关系可知

$A \sim_c B \Leftrightarrow \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$

§12 实二次型

在本节中, $F = \mathbb{R}$

定理 12.1 (惯性定理)

设 q 是 V 上二次型. 则

(i) $\exists$ V 中的一组基 $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n$ 使得

在该基下 q 的矩阵是

$$\begin{pmatrix} E_s & O & O \\ O & -E_t & O \\ O & O & O \end{pmatrix},$$

从而 $s + t = \mathrm{rank}(q)$.

(ii) 设 g 在 V 的另一组基 $\vec{\varepsilon}_1', \dots \vec{\varepsilon}_n'$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} E_{s'} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{t'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 $s=s'$, $t=t'$

证: (i) 由定理11.1. V 中有基底 $\vec{\varepsilon}_1 \dots \vec{\varepsilon}_n$ 使得 g 在该基下的矩阵为对角阵 A

与证明~~命~~题11.3.类似

$$A \sim_c \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & \\ & & \alpha_s & & & & & \\ & & & \alpha_{s+1} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & 0 & & & & \alpha_{s+t} & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

其中 $\alpha_1, \dots \alpha_s$ 是正实数, $\alpha_{s+1}, \dots \alpha_{s+t}$ 是负实数.

设 $$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\alpha_s}} & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{-\alpha_{s+1}}} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & 0 & & & & \frac{1}{\sqrt{-\alpha_{s+t}}} & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^t A Q = \underbrace{\begin{pmatrix} E_s & 0 & 0 \\ 0 & -E_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{C}$$

$\Rightarrow$ $A \sim_c C$

$C = P^t A P$. 则 g 在

设 $(\vec{\varepsilon}_1', \dots \vec{\varepsilon}_n') = (\vec{\varepsilon}_1, \dots \vec{\varepsilon}_n) P$ 在下的矩阵为 C

(ii) ~~设~~ $\because$ $s+t = \text{rank}(g) = s'+t'$

$\therefore$ 只要证明 $s=s'$ 即可

假设 $s > s'$

设 $U = \langle \vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_s \rangle$

$U' = \langle \vec{\varepsilon}_{s'+1}', \dots, \vec{\varepsilon}_n' \rangle$

$$\begin{aligned} \dim(U \cap U') &= \dim U + \dim U' - \dim(U+U') \\ &\geq s + n - s' - n \\ &= s - s' > 0 \end{aligned}$$

于是 $\exists\, \vec{\alpha} \in U \cap U'$ 且 $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$

设：$\vec{u} = \alpha_1\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + \alpha_s\vec{\varepsilon}_s = \beta_{s+1}\vec{\varepsilon}'_{s+1} + \cdots + \beta_n\vec{\varepsilon}'_n$

其中 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s \in \mathbb{R}$ 不全为零

$\beta_{s+1},\ldots,\beta_n \in \mathbb{R}$ ……

$q(\vec{u}) = \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_s^2 > 0$ $\rightarrow\leftarrow$

$q(\vec{u}) = \beta_{s+1}^2 + \cdots + \beta_n^2 \le 0$

于是 $s \le s'$. 同理 $s' \le s$.

$\Rightarrow s = s' \Rightarrow t = t'$ ▨

定义：设 q, s, t ~~如上~~述定理所述. 称 s 为 q 的正惯性指数. t 为 q 的负惯性指数. (s,t) 为 q 的签名

注：当 (s,t) 为 q 的签名时，q 在某组基下为

$$q(\vec{x}) = x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_{s+t}^2$$

其中 $\mathrm{rank}(q) = s+t$

推论 12.1 设 $A \in SM_n(\mathbb{R})$.

则 $\exists!\ s,t \in \mathbb{N}$ 使得

$$A \sim_c \begin{pmatrix} E_s & O & O \\ O & -E_t & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

证：由定理11.2 和 12.1 直接得出.

定义：设 A 是，s,t 同上. 称

s 是 A 的正惯性指数 ————

t 是 ……负

(s,t) 是 A 的签名

推论 12.2 设 $A, B \in SM_n(\mathbb{R})$

$A \sim_c B \iff A, B$ 有共同的签名

证：

~~$q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$~~

~~$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto (x_1, \ldots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$~~

$\Rightarrow$ 由定理12.2 ~~存在 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 $\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_n$~~

~~使得 q 在该基下的矩阵是 B~~

证: $\Rightarrow$ $\because A \sim_c \begin{pmatrix} E_s & 0 & 0 \\ 0 & E_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (惯性定理)

$\therefore B \sim_c \begin{pmatrix} E_s & 0 & 0 \\ 0 & E_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

由惯性定理中 s.t 的唯一性

A, B 有共同签名

□

$\Leftarrow$ 显然.

例 求实二次型

$$p(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$$

的签名

解: p 在标准基下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \sim_c \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{对称}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_{21}(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{对称}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_{34}(1)]{F_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{对称}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_{41}(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{对称}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_{43}(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{对称}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ A 的签名是 (1, 3)

例：设 $g: M_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$
$A \mapsto tr(A^2)$

证明 g 是 $M_3(\mathbb{R})$ 上的二次型.

求 g 的签名

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$tr(A^2) = tr\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right]$$

$$= a_{11}^2 + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{22}^2 + a_{12}a_{21} + a_{32}a_{23} + a_{33}^2 + a_{13}a_{31} + a_{32}a_{23}$$

$$= a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + 2a_{12}a_{21} + 2a_{23}a_{32} + 2a_{13}a_{31}$$

$$\begin{cases} a_{11} = z_{11} \\ a_{22} = z_{22} \\ a_{33} = z_{33} \\ a_{12} = z_{12} + z_{21} \\ a_{21} = z_{12} - z_{21} \end{cases} \quad \begin{matrix} a_{23} = z_{23} + z_{32} \\ a_{32} = z_{23} - z_{32} \\ a_{13} = z_{13} + z_{31} \\ a_{31} = z_{13} - z_{31} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{33} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{23} \\ a_{32} \\ a_{31} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & 1 & & & & \\ & & & 1 & -1 & & & & \\ & & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & 1 & -1 & & \\ & & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{22} \\ z_{33} \\ z_{12} \\ z_{21} \\ z_{23} \\ z_{32} \\ z_{13} \\ z_{31} \end{bmatrix} = \vec{z}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} E_3 & & & \\ & D_2 & & \\ & & D_2 & \\ & & & D_2 \end{bmatrix}}_{B} \vec{z}. \quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

B 可逆.

$$tr(A^2) = z_{11}^2 + z_{22}^2 + z_{33}^2 + 2z_{12}^2 - 2z_{21}^2 + 2z_{13}^2 - 2z_{31}^2 + 2z_{23}^2 - 3z_{32}^2$$

签名为 $(6, 3)$. ☐

§13. Jacobi 公式

定义：设 $A\in M_n(F)$，$1<i_1<\cdots<i_k<n$

由 A 中 $i_1,\dots,i_k$ 行 和 $i_1,\dots,i_k$ 列

组成的方阵的行列式

$$M_A\begin{pmatrix} i_1,\cdots i_k \\ i_1,\cdots i_k\end{pmatrix}$$

称为 A 的一个 k 阶主子式。当 $i_1=1,\dots,i_k=k$ 时 $M_A\begin{pmatrix} 1,\cdots k \\ 1,\cdots,k\end{pmatrix}$ 称为 A 的顺序主子式

例 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$

A 的一阶顺序主子式是 a_{11}

A 的二阶顺序主子式是 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$

A 的三 — — — $|A|$.

定理 13.1 设 $A\in SM_n(F)$. 令 $\Delta_0=1$, Δ_k 是 A 的 k 阶顺序主子式 $k=1,2,\dots,n$. 如果 $\Delta_1,\dots\Delta_k$ 都非零

则 $A\sim_c\begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta_0} & & & \\ & \frac{\Delta_2}{\Delta_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\end{pmatrix}$

证：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$

当 $n=1$ 时 $A=(a_{11})=\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}\right)$

于是 $A\sim_c\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}\right)$ 定理成立

设 $n>1$ 且定理对 $n-1$ 阶对称矩阵成立

设 $B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ & & \cdots & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1}\end{pmatrix}$

则 B 对称且 B 的 k 阶顺序主子式 与 A 的 k 阶顺序主子式相同。

由归纳假设 $\exists P\in GL_{n-1}(F)$，使得

$$P^tBP=\begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta_0} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}\end{pmatrix}$$

令 $Q=\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} B & \vec{a} \\ \vec{a}^t & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$C=Q^tAQ=\begin{pmatrix} P^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & \vec{a} \\ \vec{a}^t & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} P^tBP & P^t\vec{a} \\ \cancel{P^t\vec{a}^t}\,\vec{a}^tP & a_{nn} \end{pmatrix}$$

设 $\vec{b}=P^t\vec{a}$

则 $$C=Q^tAQ=\begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta_0} & & 0 & \vec{b} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} & \\ & \vec{b}^t & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

因为 $\frac{\Delta_1}{\Delta_0}$ … $\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$ 都非零

所以由对称的高斯消去法

$$C\sim_c\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta_0} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} & \\ 0 & & & \alpha \end{pmatrix}}_{D}\sim_c A$$ ⑯

于是 $\exists\, R\in GL_n(F)$ 使得

$\cancel{A=R^t}$

$$D=R^tAR$$

于是 $|D|=|R|^2|A|$

$\Rightarrow \alpha\Delta_{n-1}=|R|^2\Delta_n \Rightarrow \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}=\frac{\alpha}{|R|^2}$

$\cancel{\frac{1}{|R|}E_n(D)\frac{1}{|R|}}$

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{|R|} \end{pmatrix}^t D\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{|R|} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta_0} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} & \\ 0 & & & \frac{\alpha}{|R|^2} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta_0} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} & \\ 0 & & & \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \end{pmatrix}.$$ ▨