四 12 种变匹：$F=\mathbb{R}$

惯性定理：设 $q: V\to\mathbb{R}$ 是二次型

(i) $\exists$ V 的一组基 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 使得，q 在该基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} E_s & O & O \\ O & -E_t & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

此时 $\forall \vec{x}=x_1\vec{e}_1+\dots+x_n\vec{e}_n$

$$q(\vec{x})=x_1^2+\dots+x_s^2-x_{s+1}^2-\dots-x_{s+t}^2$$

(ii) 若 $\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_n$ 是 V 的另一组基，使得 q 在 $\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_n$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} E_{s'} & O & O \\ O & -E_{t'} & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

则 $s=s'$，$t=t'$

(0)

(ii) 假设 $s>s'$

则令 $U=\langle\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_s\rangle$，$U'=\langle\vec{\varepsilon}_{s'+1},\dots,\vec{\varepsilon}_n\rangle$

由维数公式可知：$\exists\,\vec{u}\in U\cap U'$ 且 $\vec{u}\neq 0$

设 $\vec{u}=\alpha_1\vec{e}_1+\dots+\alpha_s\vec{e}_s$，$\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 不全为零

$=\beta_{s'+1}\vec{\varepsilon}_{s'+1}+\dots+\beta_n\vec{\varepsilon}_n$，$\beta_{s'+1},\dots,\beta_n$ 不全为零

则 $q(\vec{u})=\alpha_1^2+\dots+\alpha_s^2>0$ $(s>0)$

$q(\vec{u})=-\beta_{s'+1}^2-\dots-\beta_{s'+t'}^2\leq 0$. $\rightarrow\leftarrow$

$\Rightarrow s=s'$

§14 正定二次型

记号：在本节中 $F=\mathbb{R}$，$\dim_{\mathbb{R}} V = n$.

§14.1 实二次型的类型

定义：设 q 是 V 上二次型

如果 $\begin{cases} \forall \vec{x}\in V,\ q(\vec{x})\geq 0 \\ \forall \vec{x}\in V\setminus\{\vec{0}\},\ q(\vec{x})>0 \\ \forall \vec{x}\in V,\ q(\vec{x})\leq 0 \\ \forall \vec{x}\in V\setminus\{\vec{0}\},\ q(\vec{x})<0 \end{cases}$，则称 q 是 $\begin{cases} \text{半正定} \\ \text{正定} \\ \text{半负定} \\ \text{负定} \end{cases}$

如果 $\exists\, \vec{x},\vec{y}\in V$ 使得 $q(\vec{x})>0$，$q(\vec{y})<0$

则称 q 是不定的

例：设 q_1, q_2 是 V 上二次型. 证明

(i) q_1+q_2 也是 V 上的二次型

(ii) 如果 q_1 半正定，q_2 正定，则 q_1+q_2 也正定

证：(i) 设 f_1, f_2 分别为 q_1, q_2 的配极.

可直接证明 f_1+f_2 是对称双线性型.

设 $q = q_1+q_2$. 则 $\forall \vec{x}\in V$

$$q(\vec{x}) = q_1(\vec{x}) + q_2(\vec{x}) = f_1(\vec{x},\vec{x}) + f_2(\vec{x},\vec{x})$$
$$= (f_1+f_2)(\vec{x},\vec{x}).$$

由命题 11.2，q 是 V 上二次型.

(ii) $\forall \vec{x}\in V\setminus\{\vec{0}\}$

$$q(\vec{x}) = \underset{\geq 0}{q_1(\vec{x})} + \underset{>0}{q_2(\vec{x})} > 0$$

定理 14.1 设 q 是 V 上二次型，(s,t) 是 q 的签名. 则

$$\begin{cases} q\ \text{半正定} \\ q\ \text{正定} \\ q\ \text{半负定} \\ q\ \text{负定} \\ q\ \text{不定} \end{cases} \iff \begin{cases} t=0 & \text{即 } s=\operatorname{rank}(q) \\ s=n & \\ s=0 & \text{即 } t=\operatorname{rank}(q) \\ t=n & \\ s\neq 0 \text{ 且 } t\neq 0 & \end{cases}$$

证：由惯性定理，存在 V 的基底 $\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n$

使得 $\forall \vec{x}=x_1\vec{\varepsilon}_1+\cdots+x_n\vec{\varepsilon}_n\in V$

$$q(\vec{x})=x_1^2+\cdots+x_s^2-x_{s+1}^2-\cdots-x_{s+t}^2$$

(i) "$\Leftarrow$" 设 $t=0$. 则 $q(\vec{x})=x_1^2+\cdots+x_s^2\geqslant 0$

"$\Rightarrow$" 设 q 半正定. 但 $t>0$. 则

$$q(\vec{\varepsilon}_{s+1})=-1<0 \quad \rightarrow\leftarrow.$$

(ii) "$\Leftarrow$" 设 $s=n$. ~~$\because s+t\leqslant \mathrm{rank}(q)\leqslant n$~~

则 $q(\vec{x})=x_1^2+\cdots+x_n^2\Rightarrow q(\vec{x})$ 当 $\vec{x}\neq\vec{0}$ 时为正.

"$\Rightarrow$" 设 ~~$s<n$~~ q 正定. 但 $s<n$

则 $q(\vec{\varepsilon}_{s+1})\leqslant 0$ 矛盾

注意到 q (半)负定 $\Leftrightarrow -q$ (半正定)

而 $-q$ 的签名是 (t,s). 于是

结论(iii)和(iv)成立.

最后的结论可通过排除前四个结论得到

例：设 $q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$
$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\mapsto x_1^2-2x_1x_2-x_2^2$

确定 q 的类型

解：q 在标准基下的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1\\0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix}$$

q 的签名是 $(1,1)\Rightarrow q$ 不定.

定义：设 q 是 V 上二次型

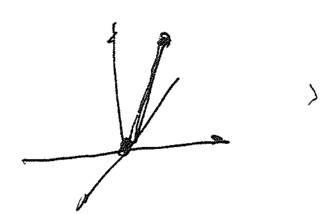
$$C_q:=\{\vec{x}\in V\mid q(\vec{x})=0\}$$

称为由 q 决定的二次锥面 (cone)

注 设 $\vec{x}\in C_q$. 则 $\forall\lambda\in\mathbb{R}$

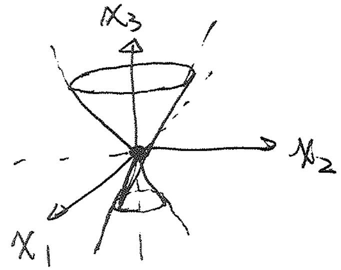
$$q(\lambda\vec{x})=\lambda^2 q(\vec{x})=0$$

见推论11.1



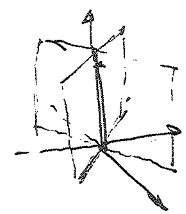
③

例：设 $q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$



锥面方程：$x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$

例：设 $q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 - x_2^2$



锥面方程：$x_1^2 = x_2^2$ 即 $x_1 = x_2$ 或 $x_1 = -x_2$

命题 14.1 设 q 是 V 上二次型，$r = \mathrm{rank}(q)$
如果 q 半正定，则 C_q 是 $n-r$ 维子空间

证：由惯性定理. 存在 V 中一组基 $\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n$ 使得 $\forall \vec{x} = x_1\vec{\varepsilon}_1 + \dots + x_n\vec{\varepsilon}_n$

$$q(\vec{x}) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2$$

因为 q 半正定. $t = 0$ 且 $r = s$. 于是

$$q(\vec{x}) = x_1^2 + \dots + x_r^2$$

设 $U = \langle \vec{\varepsilon}_{r+1}, \dots, \vec{\varepsilon}_n \rangle$. 设
$\vec{u} = \alpha_{r+1}\vec{\varepsilon}_{r+1} + \dots + \alpha_n\vec{\varepsilon}_n$

$q(\vec{u}) = 0 \Rightarrow \vec{u} \in C_q \Rightarrow U \subset C_q$

设 $\vec{v} = \beta_1\vec{\varepsilon}_1 + \dots + \beta_n\vec{\varepsilon}_n \in C_q$ 则

$0 = q(\vec{v}) = \beta_1^2 + \dots + \beta_r^2 \Rightarrow \beta_1 = \dots = \beta_r = 0$

于是 $\vec{v} \in U \Rightarrow C_q \subset U$. ☒

即 $C_q = U$

§14.2 实对称矩阵的类型

定义：设 $A \in SM_n(\mathbb{R})$. 实二次型

$$q_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

称为 A 对应的二次型

定义：q_A 的类型 称为 A 的类型

定理 14.2 设 $A\in SM_n(\mathbb{R})$，签名是 (s,t)，则

$$A\begin{cases}\text{半正定}\\ \text{正定}\\ \text{半负定}\\ \text{负定}\\ \text{不定}\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t=0，\text{即 } s=\operatorname{rank}(A)\\ s=n\\ s=0，\text{即 } t=\operatorname{rank}(A)\\ t=n\\ s\neq 0 \text{ 且 } t\neq 0\end{cases}$$

证：因为 A 与 q_A 有同样的签名，

所以定理直接由定理 14.1 可得.

例：设 $A\in SM_n(\mathbb{R})$ 证明

A 正定 $\Longleftrightarrow$ A 半正定且可逆

证：设 A 的签名是 (s,t)

A 正定 $\Longleftrightarrow s=n \Longleftrightarrow t=0$ 且 A 可逆

$\Longleftrightarrow$ A 半正定且 A 可逆 ▯

§14.3 （半）正定性与矩阵的乘法

引理 14.1 设 $A=B^tB$ 其中 $B\in M_n(\mathbb{R})$

则 (i) A 半正定

(ii) 如果 B 可逆，则 A 正定

④

证：验证 A 对称.

$$A^t=(B^tB)^t=B^t(B^t)^t=B^tB=A$$

设 $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}$

$$q_A(\vec{x})=\vec{x}^tA\vec{x}=\vec{x}^t(B^tB)\vec{x}=(\vec{x}^tB^t)(B\vec{x})$$

$$=\cancel{\vec{x}B}(B\vec{x})^t(B\vec{x})$$

设 $\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=B\vec{x}$ 则

$$q_A(\vec{x})=(y_1,\cdots,y_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=y_1^2+\cdots+y_n^2\geq 0$$

$\Rightarrow$ A 半正定

(ii) $\because B$ 可逆 $\therefore A$ 可逆. 由 §14.2 节的例子可知. A 正定.

定理 14.3 设 $A\in SM_n(\mathbb{R})$

(i) A 半正定 $\Longleftrightarrow \exists B\in M_n(\mathbb{R})$，使得 $A=B^tB$

(ii) A 正定 $\Longleftrightarrow \exists B\in GL_n(\mathbb{R})$ 使得 $A=B^tB$

证 (i) “$\Leftarrow$” 引理 14.1 (i)

“$\Rightarrow$” $\because A$ 半正定 $\therefore$ $A\underset{c}{\sim}\underbrace{\begin{pmatrix}E_s & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}}_{C}$

（推论 12.1）

于是 $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ 使得 $A = P^tCP$

注意到 $C = C^2 = C^tC$

$$A = P^tC^t\underbrace{CP}_{B} = B^tB.$$

(ii) "⟸" 引理14.1 (ii)

"⟹" 因为 A 正定，所以 A 半正定

由(i) $\exists B \in M_n(\mathbb{R})$，使得

$$A = B^tB$$

又因为 A 可逆．所以 B 可逆． ▨

例．设 $A \in SM_n(\mathbb{R})$ 正定 证明

$|A| > 0$ 且 A^{-1} 也正定

证：由上述定理．$\exists B \in GL_n(\mathbb{R})$ 使得

$$A = B^tB$$

$$|A| = |B^t||B| = |B|^2 > 0$$

$$A^{-1} = (B^tB)^{-1} = B^{-1}(B^t)^{-1} = B^{-1}(B^{-1})^t$$ ▨

例：设 $B \in M_n(\mathbb{R})$ 证明

$$\mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(B^tB).$$

证：设 $A = B^tB$ 则 A 半正定．设 $r = \mathrm{rank}(B)$，$h = \mathrm{rank}(A)$

要证：$r = h$ 只要证 $n-r = n-h$.

设 V_B 是 $B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 的解空间

而 C_A 是 φ_A 确定的二次锥．

则 $\dim V_B = n-r$．且由命题14.1

C_A 的子空间，其维数是 $n-h$.

于是只要证：$V_B = C_A$

设 $\vec{v} \in V_B$．$\varphi_A(\vec{v}) = \vec{v}^tA\vec{v} = \vec{v}^tB^t\underbrace{(B\vec{v})}_{=0} = 0$

于是 $V_B \subset C_A$

设 $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in C_A$ 则

$$0 = \varphi_A(\vec{w}) = (w_1, \cdots w_n)A\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$= (w_1, \cdots w_n)B^tB\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

令 $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$

则 $0 = y_1^2 + \cdots + y_n^2 \Rightarrow y_1 = \cdots = y_n = 0$

$\Rightarrow \vec{w} \in V_B$ ~~$V_B \in$~~

于是 $C_A \subset V_B$. 由此可知 $C_A = V_B$ $\square$

§14.4 正定性与行列式

定理 14.4 设 $A \in SM_n(\mathbb{R})$. 以下结论等价

(i) A 正定

(ii) A 的所有主子式为正

(iii) A 的所有顺序主子式为正

证: (i) $\Rightarrow$ (ii) 设 A 正定.

$1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, $B = \begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & \cdots & a_{i_1 i_k} \\ & \cdots & \\ a_{i_k i_1} & \cdots & a_{i_k i_k} \end{pmatrix}$

设 $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{i_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{i_2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{i_k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}' = \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \\ \vdots \\ x_{i_k} \end{pmatrix}$

$q_B(\vec{x}') = (\vec{x}')^t B (\vec{x}') = \vec{x}^t A \vec{x}$

于是 当 $\vec{x}' \in \mathbb{R}^k \setminus \{\vec{0}\}$ 时. $q_B(\vec{x}') > 0$.

B 正定 $\Rightarrow |B| > 0$ (见§14.3 例3)

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 显然.

(iii) $\Rightarrow$ (i) 由定理13.1 (Jacobi 公式)

$A \sim_c \begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta_0} & & 0 \\ & \frac{\Delta_2}{\Delta_1} & \\ 0 & & \ddots \ \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \end{pmatrix}$, 其中 $\Delta_0 = 1$, Δ_k 是

A 的 k 阶顺序主子式. $k = 1, 2, \ldots, n$.

~~于是~~ $\because$ $\Delta_1 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$ $\square$

$\therefore$ $A \sim_c E_n$

例: 设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & 1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$. $\lambda \in \mathbb{R}$

(i) 当 λ 为何值时 A 正定

(ii) 当 λ 为何值时 A 负定

证: 直接计算得

$\Delta_1 = \lambda$, $\Delta_2 = (\lambda-1)(\lambda+1)$, $\Delta_3 = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$

(i) A 正定 $\Longleftrightarrow \Delta_1>0, \Delta_2>0, \Delta_3>0$

$\Longleftrightarrow \lambda>1$

(ii) A 负定 $\Longleftrightarrow -A$ 正定 $\Longleftrightarrow \Delta_1<0, \Delta_2>0, \Delta_3<0$

$\Longleftrightarrow \lambda<-2$

§15 Hadamard 不等式

引理 15.1 设 $A\in M_m(F)$ 可逆，$B\in \mathbb{F}^{m\times n}$，$C\in \mathbb{F}^{n\times m}$，$D\in M_n(F)$. 则

$$\det\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix} = \det(A)\det(D-CA^{-1}B)$$

证：

$$\underbrace{\begin{pmatrix} E_m & O\\ -CA^{-1} & E_n\end{pmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}}_{Q} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & B\\ O & D-CA^{-1}B\end{pmatrix}}_{R}$$

$\det(P)=1$，$\det(PQ)=\det(P)\det(Q)=$

$=\det(Q)=\det(A)\det(D-CA^{-1}B)$ ▨

（平行书 p111，练习10）.

引理15.2 设 $A\in SM_n(\mathbb{R})$ 正定. 令 $A=(a_{ij})_{n\times n}$. 则 $\det(A)\le a_{11}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$

注：由定理14.4中 (i) ⇒ (ii) 的证明可知：如果 A 正定且 $1\le i_1<\cdots<i_k\le n$，则 A 中在 $i_1,\dots,i_k$ 行和 $i_1,\dots,i_k$ 处组成的 k 阶方阵也正定.

引理15.2 的证明：对于 n 归纳.

$n=1$，$A=(a_{11})$，$\det(A)=a_{11}\le a_{11}$ ✓

设 $n>1$ 且 A 是 $n-1$ 阶正定矩阵时结论成立. 设 A_{n-1} 是 A 中由前 $n-1$ 行和 $n-1$ 列处元素构成的矩阵.

由上述注：A_{n-1} 正定，则 A_{n-1} 可逆且 A_{n-1}^{-1} 正定

$$A=\begin{pmatrix} A_{n-1} & \vec{\alpha}\\ \vec{\alpha}^t & a_{nn}\end{pmatrix}，\quad 其中\ \vec{\alpha}=\begin{pmatrix} a_{1n}\\ \vdots\\ a_{n-1,n}\end{pmatrix}$$

由引理 15.1.

$$\det(A)=\det(A_{n-1})(a_{nn}-\vec{\alpha}^t A_{n-1}^{-1}\vec{\alpha}_n)$$

$$\le \underbrace{a_{11}\cdots a_{n-1,n-1}}_{归纳假设}a_{nn}\ 且\ \vec{\alpha}^t A_{n-1}^{-1}\vec{\alpha}_n\ge 0.$$

定理15.1 (Hadamard不等式)

设 $A\in M_n(\mathbb{R})$, 令 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 则

$$\left[\det(A)\right]^2 \leqslant \prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2\right)$$

证: 不妨设 $\det(A)\neq 0$. 令 $B=A^tA$

且由定理14.3, B正定.

设 $B=(b_{ij})_{n\times n}$. 则

$$b_{jj}=(a_{1j},\cdots a_{nj})\begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{nj}\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2$$

$$\begin{aligned}\left[\det(A)\right]^2 &= \det(B)\\ &\leqslant b_{11}\cdots b_{nn} \quad (引理15.2)\\ &\leqslant \prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2\right) \quad \boxtimes\end{aligned}$$

§16. 二次曲面~~位置~~的仿射分类 ⑧

(见封书 p197–204)

定义: 设 $p\in\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]$, $\deg(p)=2$. 令

$$S_p := \{\vec{x}\in\mathbb{R}^n \mid p(\vec{x})=0\}$$

则称 S_p 是由 p 在 $\mathbb{R}^n$ 中确定的二次曲面

或由方程 $p(x_1,\cdots,x_n)=0$ 轨迹

定义: 设 $A\in GL_n(\mathbb{R})$, $\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}$

$$\rho:\ \begin{aligned}\mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n\\ \vec{x} &\longmapsto A\vec{x}+\vec{\alpha}\end{aligned}$$

称 ρ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的仿射变换

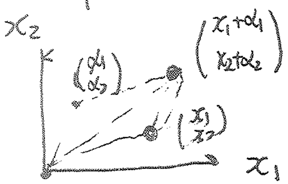
(affine transformation)

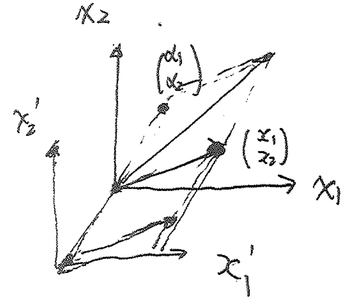
当 $A=E_n$ 时　$\rho(\vec{x})=\vec{x}+\vec{\alpha}$. 称 ρ 为平移

当 $\vec{\alpha}=\vec{0}$ 时　$\rho(\vec{x})=A\vec{x}$, 称 ρ 为可逆线性算子.

当我们把 $\vec{x}$ 理解为 $\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$ 点

例 平移





$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+\alpha_1 \\ x_2+\alpha_2 \end{pmatrix}$

例 可逆线性

$$\rho(\vec{x})=A\vec{x}=\vec{y}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\vec{y}$ 也可理解为 $\vec{x}$ 在基变换

$$(\vec{\varepsilon}_1, \dots \vec{\varepsilon}_n) = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) A^{-1}$$

下的坐标, 其中 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 是标准基.

命题 15.1 设 ρ_1, ρ_2 是 $\mathbb{R}^n$ 上的仿射变换. 则 (i) $\rho_2 \circ \rho_1$ 也是仿射变换

(ii) 任何仿射变换都是双射, 且其逆也是仿射变换

证: 设 $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$\rho_1(\vec{x}) = A_1\vec{x}+\vec{\alpha_1}$, $\rho_2(\vec{x}) = A_2\vec{x}+\vec{\alpha_2}$

(i) $\rho_2 \circ \rho_1(\vec{x}) = \rho_2(A_1\vec{x}+\vec{\alpha_1})$

$= A_2(A_1\vec{x}+\vec{\alpha_1})+\vec{\alpha_2} = (A_2A_1)\vec{x}+(A_2\vec{\alpha_1}+\vec{\alpha_2})$ (*)

即 $\rho_2 \circ \rho_1(\vec{x}) = (\underbrace{A_2A_1}_{\text{可逆}})\vec{x}+(\underbrace{A_2\vec{\alpha_1}+\vec{\alpha_2}}_{\in \mathbb{R}^n})$

(ii) 设: $\rho_2: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$
$\vec{x} \longmapsto A_1^{-1}\vec{x} - A_1^{-1}\vec{\alpha_1}$

由 (*)　$\rho_2 \circ \rho_1(\vec{x}) = \vec{x}$

直接计算可得 $\rho_1 \circ \rho_2(\vec{x}) = \vec{x}$ ▢

定理15.1 设 $p\in\mathbb{R}[x_1,\cdots x_n]$，$\deg(p)=2$，$q$是 p中齐二次部分，设 (s,t) 是 q 作为 $\mathbb{R}^n$上二次型的签名，则存在 $\mathbb{R}^n$上仿射变换 使得

$$p(\rho(\vec{x}))=x_1^2+\cdots+x_s^2-x_{s+1}^2-\cdots-x_{s+t}^2-\lambda x_{s+t+1}-\mu$$

其中 $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$，$\lambda\in\{0,1\}$，$\mu\in\mathbb{R}$

证：$p(\vec{x})=q(\vec{x})+l(\vec{x})+\xi$

其中 l是齐一次的，$\xi\in\mathbb{R}$

设 $q(\vec{x})=\vec{x}^tA\vec{x}$，其中 $A\in SM_n(\mathbb{R})$.

由推论12.2. $\exists P\in GL_n(\mathbb{R})$，使得

$$P^tAP=\begin{pmatrix}E_s&O&O\\O&-E_t&O\\O&O&O\end{pmatrix}$$

设 $\rho_1:\ \mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$
$\vec{x}\longmapsto P\vec{x}$

$$p\circ\rho_1(\vec{x})=p(\rho_1(\vec{x}))$$
$$=\vec{x}^tP^tAP\vec{x}+l(P\vec{x})+\xi$$
$$=\vec{x}^t\begin{pmatrix}E_s&O&O\\O&-E_t&O\\O&O&O\end{pmatrix}\vec{x}+l(P(\vec{x}))+\xi$$
$$=x_1^2+\cdots+x_s^2-x_{s+1}^2-\cdots-x_{s+t}^2+2\alpha_1x_1+\cdots+2\alpha_nx_n+\xi$$

其中 $\alpha_1,\ldots\alpha_n\in\mathbb{R}$

$$p\circ\rho_1(\vec{x})=(x_1+\alpha_1)^2+\cdots+(x_s+\alpha_s)^2-(x_{s+1}-\alpha_{s+1})^2-\cdots-(x_{s+t}-\alpha_{s+t})^2+\cdots+2\alpha_nx_n$$
$$+\cancel{2}\alpha_{s+t+1}x_{s+t+1}$$
$$+\eta$$

其中 $\eta\in\mathbb{R}$

设：$\rho_2:\ \mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_s\\ x_{s+1}\\ \vdots\\ x_{s+t}\\ x_{s+t+1}\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x_1+\alpha_1\\ \vdots\\ x+\alpha_s\\ x-\alpha_{s+1}\\ \vdots\\ x-\alpha_{s+t}\\ x_{s+t+1}\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

$$p\circ\rho_1\circ\rho_2^{-1}(\vec{x})=p\circ\rho_1(\rho_2^{-1}(\vec{x}))$$
$$=x_1^2+\cdots+x_s^2-x_{s+1}^2-\cdots-x_{s+t}^2+2\alpha_{s+t+1}x_{s+t+1}+\cdots+2\alpha_nx_n$$
$$+\eta$$

情形1

$\alpha_{s+t+1} = \cdots = \alpha_n = 0$

则 $p(\rho_1\circ\rho_2^{-1}(\vec{x})) = x_1^2+\cdots+x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_{s+t}^2 + \eta$

令 $\lambda = 0$, $\mu = -\eta$ 即可

情形2. $\alpha_{s+t+1}, \cdots, \alpha_n$ 不全为零

设 $j \in \{s+t+1, \cdots, \alpha_n\}$, $\alpha_j \neq 0$ 且

$\alpha_{s+t+1} = \cdots = \alpha_{j-1} = 0$

$$\rho_3: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ x_j \\ x_{j+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ \frac{1}{\alpha_j}(\alpha_j x_j + \cdots + \alpha_n x_n) \\ x_{j+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$p(\rho_1\circ\rho_2^{-1}\circ\rho_3^{-1}(\vec{x})) = x_1^2+\cdots+x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_{s+t}^2 - x_j + \eta$

$$\rho_4: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{s+t+1} \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_{s+t+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

则 $p\circ\rho_1\circ\rho_2^{-1}\circ\rho_3^{-1}\circ\rho_4(\vec{x}))$

$= x_1^2+\cdots+x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_{s+t}^2 - x_{s+t+1} + \eta$

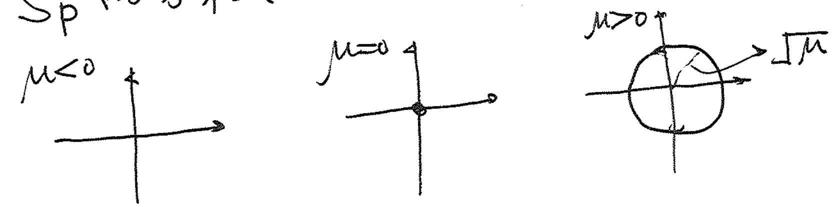
令 $\lambda = 1$, $\mu = -\eta$ 即可 ▨

例: $n=2$

情形1. $(s,t) = (2,0)$

$p(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 - \mu$.

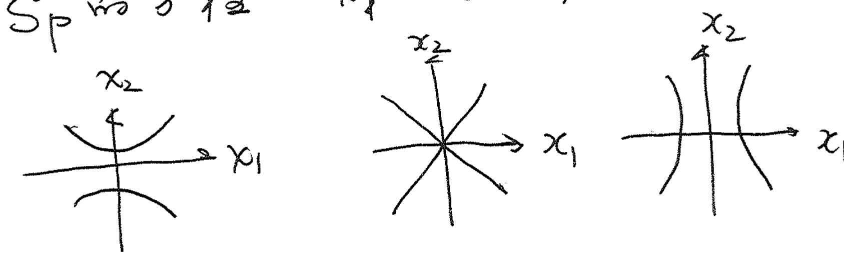
S_p 的方程: $x_1^2 + x_2^2 = \mu$



情形2 $(s,t) = (1,1)$

$p(\vec{x}) = x_1^2 - x_2^2 - \mu$

S_p 的方程 $x_1^2 - x_2^2 = \mu$

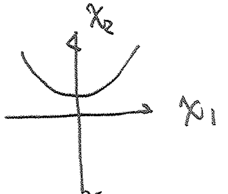


$\mu<0$ $\mu=0$ $\mu>0$

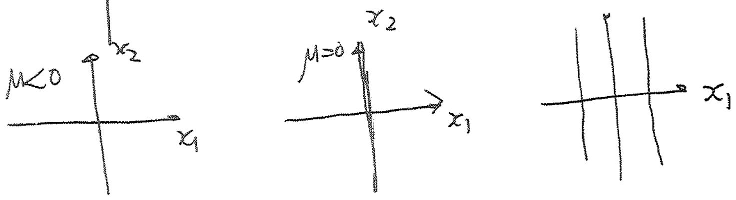
情形3. $(s.t)=(1,0)$

$p(\vec{x})=x_1^2-\lambda x_2-\mu$. S_p 的方程 $x_1^2=\lambda x_2+\mu$

$\lambda=1$



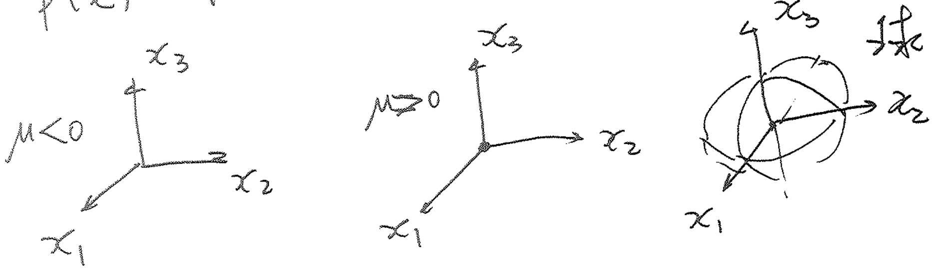
$\lambda=0$



例 $n=3$

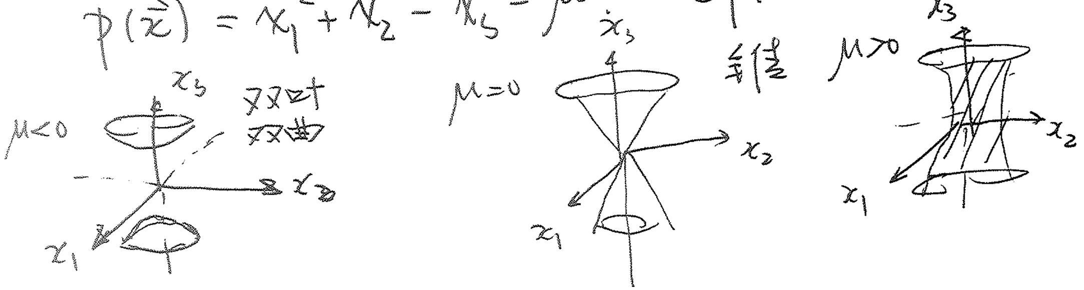
情形1 $(s.t)=(3,0)$

$p(\vec{x})=x_1^2+x_2^2+x_3^2-\mu$. S_p: $x_1^2+x_2^2+x_3^2=\mu$



情形2 $(s.t)=(2,1)$

$p(\vec{x})=x_1^2+x_2^2-x_3^2-\mu$ S_p: $x_1^2+x_2^2-x_3^2=\mu$

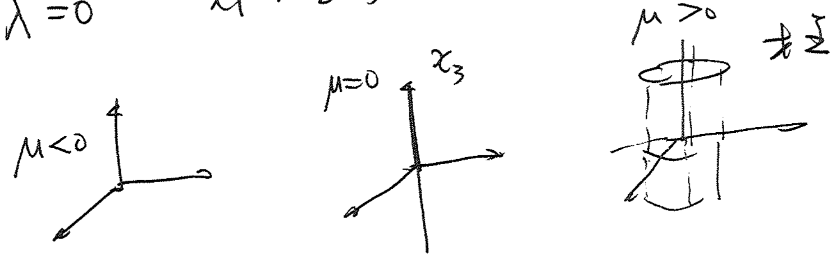


情形3 $(s.t)=(2,0)$

$p(\vec{x})=x_1^2+x_2^2-\lambda x_3-\mu$

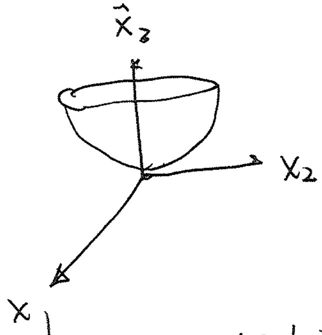
S_p : $x_1^2+x_2^2=\lambda x_3+\mu$

$\lambda=0$ $x_1^2+x_2^2=\mu$



$\lambda=1$ $x_1^2+x_2^2=x_3$

椭圆抛物面

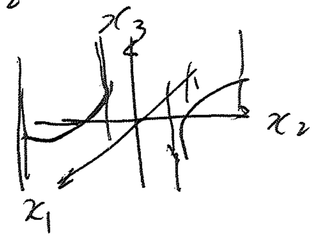


情形4 $(s.t)$ $(1,-1)$

$p(\vec{x})=x_1^2-x_2^2-\lambda x_3-\mu$

S_p: $x_1^2-x_2^2=\lambda x_3+\mu$ 双曲柱面

$\lambda=0$, $\mu\neq0$



§四 斜对称双线性型

定义. 设 $f: V\times V \to F$ 是双线性型，其中 F 的特征 $\neq 2$. 如果 $\forall \vec{x},\vec{y}\in V$

$$f(\vec{x},\vec{y}) = -f(\vec{x},\vec{y})$$

则称 f 是斜对称的.

引理 14.1 设 f 是 V 上双线性型. 则 f 斜对称 $\Leftrightarrow$ $\forall \vec{x}\in V,\ f(\vec{x},\vec{x})=0$

证: "$\Rightarrow$" $f(\vec{x},\vec{x}) = -f(\vec{x},\vec{x})$

$\Rightarrow 2f(\vec{x},\vec{x}) = 0 \Rightarrow f(\vec{x},\vec{x})=0$

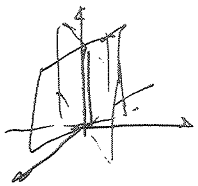
"$\Leftarrow$" $f(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) = 0$

$$= f(\vec{x},\vec{y}) + f(\vec{y},\vec{x}) + f(\vec{x},\vec{x}) + f(\vec{y},\vec{y})$$

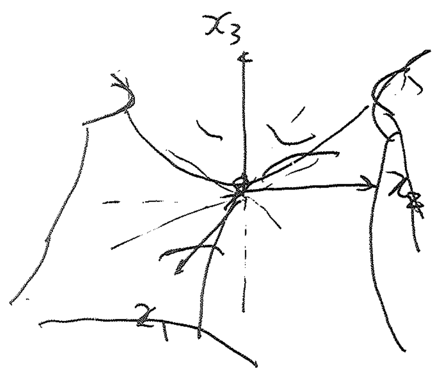
$$= f(\vec{x},\vec{y}) + f(\vec{y},\vec{x})$$

$\Rightarrow f(\vec{x},\vec{y}) = -f(\vec{y},\vec{x})$ ▨

$\lambda=0,\ \mu=0$



$\lambda=1$. $x_1^2 - x_2^2 = x_3$



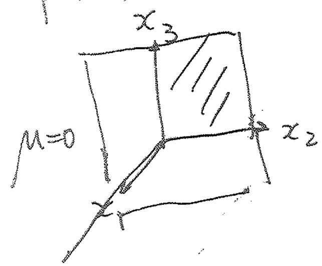
抛物双曲面 (saddle)

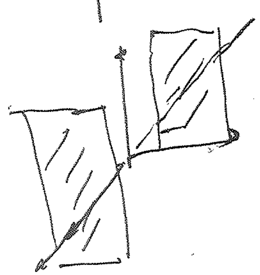
情形5. $(s,t)=(1,0)$

$p(\vec{x}) = x_1^2 - \lambda x_2 - \mu$

$Sp: x_1^2 = \lambda x_2 + \mu$

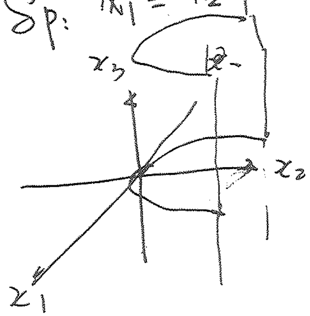
$\lambda=0$





$\mu>0$.

$\lambda=1$. $Sp: x_1^2 = x_2$



抛物柱面

引理16.2 设 f 是 V 上双线性型，$\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$ 是 V 的一组基，则

f 斜对称 $\Leftrightarrow$ f 在 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$ 下的矩阵斜对称

证：设 f 在 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$ 下的矩阵为 A

"$\Rightarrow$" $A=(f(\vec{e_i},\vec{e_j}))=(a_{ij})$

$A^t=(a'_{ij})$，由 f 斜对称的定义和引理16.1

$a'_{ij}=a_{ji}=f(\vec{e_j},\vec{e_i})=-f(\vec{e_i},\vec{e_j})=-a_{ij}$

$\Rightarrow$ $A^t=-A$

"$\Leftarrow$" 设 A 斜对称 $\vec{x}=x_1\vec{e_1}+\dots+x_n\vec{e_n}$

$f(\vec{x},\vec{x})=\vec{x}^tA\vec{x}$

$\|$

$f(\vec{x},\vec{x})^t=[(\vec{x}^t)A\vec{x}]^t=x^tA^t\vec{x}=-\vec{x}^tA\vec{x}$

$=-f(\vec{x},\vec{x})$

$\Rightarrow 2f(\vec{x},\vec{x})=0\Rightarrow f(\vec{x},\vec{x})=0$

由引理16.1，f 斜对称 $\square$

例 一阶斜对称矩阵 $A=(0)$

二阶斜对称矩阵 $\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix}$，$a\in F$

例：$f: F^2\times F^2\longrightarrow F$

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\mapsto\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}$，

斜对称双线性型。

引理16.3 设 f 是斜对称双线性型。设 $\vec{u},\vec{v}\in V$ 满足 $f(\vec{u},\vec{v})\neq 0$。则 $\vec{u},\vec{v}$ 线性无关

证：设 $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\vec{0}$，$\alpha,\beta\in F$

$0=f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v},\vec{v})=\alpha f(\vec{u},\vec{v})+\beta f(\vec{v},\vec{v})$

$=\alpha f(\vec{u},\vec{v})$ [由引理16.1]

$\Rightarrow\alpha=0\Rightarrow\beta=0$。$\Rightarrow\vec{u},\vec{v}$ 线性无关 $\square$