回42

引理17.2 设f是V上双线性型，$\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$是V的一组基. 则

f斜对称 $\Leftrightarrow$ f在$\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$下的矩阵斜对称

证：设f在$\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$下的矩阵是A

则 $A=(f(\vec{e_i},\vec{e_j}))_{n\times n}$

由引理17.1. $f(\vec{e_i},\vec{e_i})=0,\ i=1,2,\cdots,n$

由f的定义. $f(\vec{e_i},\vec{e_j})=-f(\vec{e_j},\vec{e_i})$

于是 A斜对称.

反之 设A斜对称. $\vec{x}=x_1\vec{e_1}+\cdots+x_n\vec{e_n}$

$\vec{y}=y_1\vec{e_1}+\cdots+y_n\vec{e_n}$.

$f(\vec{x},\vec{y})=(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

$f(\vec{y},\vec{x})=(y_1,\cdots,y_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

$=\left((y_1,\cdots,y_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right)^t=(x_1\cdots x_n)A^t\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

$=-(x_1,\cdots x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

$\Rightarrow f(\vec{x},\vec{y})=-f(\vec{y},\vec{x})$ ☒

例：一阶斜对称矩阵 $A=(0)$，二阶斜对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&\alpha\\-\alpha&0\end{pmatrix}$.

例：$f: F^2\times F^2\longrightarrow F$

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\mapsto\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

引理17.3 设f是V上斜对称双线性型

设$\vec{u},\vec{v}\in V$满足$f(\vec{u},\vec{v})\neq0$

则$\vec{u},\vec{v}$线性无关

证：设$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\vec{0}$，其中$\alpha,\beta\in F$

$f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v},\vec{v})=0$

$\Rightarrow\alpha f(\vec{u},\vec{v})+\beta f(\vec{v},\vec{v})=0$

$\Rightarrow\alpha f(\vec{u},\vec{v})=0$ （引理17.1） $\Rightarrow\alpha=0$

同理 $\beta=0$. ☒

定义：设 f 是双线性型，斜对称

$\vec{u}, \vec{v} \in V$ 使得 $f(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$. 则称

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ 为 f 的一个辛平面 (simplectic plane)

引理17.4 设 f 是斜对称双线性型.

$W = \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle$ 是 f 的辛平面.

设 $\widetilde{W} = \{ \vec{v} \in V \mid f(\vec{v}, \vec{w}_1) = f(\vec{v}, \vec{w}_2) = 0 \}$

则 $V = W \oplus \widetilde{W}$

证：设 $l_i : V \to F$, $\vec{x} \mapsto f(\vec{x}, \vec{w}_2)$ $i = 1, 2$.

则 $l_1, l_2 \in V^*$.

$\widetilde{W} = \ker(l_1) \cap \ker(l_2)$

~~证 α:~~ 是子空间.

设 $\vec{u} \in W \cap \widetilde{W}$, $\vec{u} = \alpha_1 \vec{w}_1 + \alpha_2 \vec{w}_2$

其中 $\alpha_1, \alpha_2 \in F$

$0 = l_1(\vec{u}) = f(\alpha_1 \vec{w}_1 + \alpha_2 \vec{w}_2, \vec{w}_1)$

$= \alpha_1 f(\vec{w}_1, \vec{w}_1) + \alpha_2 f(\vec{w}_2, \vec{w}_1)$

$\Rightarrow \alpha_2 = 0$

$(\because f(\vec{w}_1, \vec{w}_1) = 0,\ f(\vec{w}_2, \vec{w}_1) \neq 0)$

同理 $\alpha_1 = 0 \Rightarrow \vec{u} = 0$. 于是

$W + \widetilde{W}$ 是直和

要证 $V = W \oplus \widetilde{W}$. 只需证 $\dim \widetilde{W} = n - 2$ 即可，其中 $n = \dim V$.

$\dim \widetilde{W} = \dim(\ker(l_1) \cap \ker(l_2))$

$= \dim(\ker(l_1)) + \dim(l_2)) - \dim(\ker(l_1) + \ker(l_2))$

$\geq n - 1 + n - 1 - n = n - 2$

但 $n \geq \dim(W \oplus \widetilde{W}) = \dim(W) + \dim(\widetilde{W})$

$= 2 + \dim(\widetilde{W})$

$\Rightarrow \dim(\widetilde{W}) \leq n - 2$

$\Rightarrow \dim \widetilde{W} = n - 2$ ☐

参见 推论7.4.

引理 18.5 设 $\dim V = n > 1$，f 是 V 上非零双线性型. 则存在 V 中 f 的辛平面 $W_1, \cdots, W_m$ 和子空间 U

使得

(i) $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m \oplus U$

(ii) $f|_{U\times U}$ 是 U 上的零双线性型

(iii) $\forall\, k \in \{1, \cdots, m\}$，$\vec{v} \in W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$

$\vec{w} \in W_{k+1} \oplus \cdots \oplus W_m \oplus U$

$f(\vec{v}, \vec{w}) = 0$.

证：对 n 归纳

$n=2$ ∵ f 非零 ∴ ∃ ~~[illegible]~~ $\vec{w_1}, \vec{w_2} \in V$

使得 $f(\vec{w_1}, \vec{w_2}) \neq 0$. 设 $W_1 = \langle \vec{w_1}, \vec{w_2} \rangle$

$\dim W_1 = 2$

由则 W_1 是 f 的辛平面.

$$V = W_1 \oplus \underbrace{\{\vec{0}\}}_{U}$$

(i), (ii), (iii) 都成立.

设 $\dim V < n$ 时定理成立.

当 $n = \dim V$ 时. 由引理 18.4 可知

存在 f 的辛平面 W_1 和子空间 $\widetilde{W_1}$

使得 $V = W_1 \oplus \widetilde{W_1}$

$f(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ (*)

且 $\forall\, \vec{v} \in W_1$，$\vec{w} \in \widetilde{W_1}$，

设 $g: \widetilde{W_1} \times \widetilde{W_1} \longrightarrow F$

$\tilde{x}, \tilde{y} \longmapsto f(\tilde{x}, \tilde{y})$

则 g 是 $\widetilde{W_1}$ 上的斜对称双线性型

由归纳假设

$\widetilde{W_1} = W_2 \oplus \cdots \oplus W_m \oplus U$

满足 (i) $W_2, \cdots, W_k$ 是 g 的辛平面

从而也是 f 的辛平面

(ii) g 是 U 上的零双线性型. 从而 f 也是

(iii) $\forall\, k \in \{2, \cdots, m\}$ $\forall\, \vec{u} \in W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$,

$\vec{w} \in W_{k+1} \oplus \cdots \oplus W_m \oplus U$

$g(\vec{u}, \vec{w}) = f(\vec{u}, \vec{w}) = 0$

由 (*) 可直接验证：$W_1, \cdots, W_k$，U 满足 (i), (ii), (iii)

□

定理17.1 设f是V上非零双线性型

则存在V上基底

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{2m-1}, \vec{e}_{2m}, \vec{e}_{2m+1}, \dots, \vec{e}_n$$

使得 f 在上述基底下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} S & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & S & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

证：由引理17.5可知

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m \oplus U$$

满足该引理中的条件. 设

$$W_k = \langle \vec{u}_k, \vec{v}_k \rangle$$

则且 $f(\vec{u}_k, \vec{v}_k) \neq 0$. 令 $\alpha_k = f(\vec{u}_k, \vec{v}_k)$

则 $f(\frac{1}{\alpha_k}\vec{u}_k, \vec{v}_k) = 1$. 设

$\vec{e}_{2k-1} = \frac{1}{\alpha_k}\vec{u}_k$, $\vec{e}_{2k} = \vec{v}_k$

$\vec{e}_{2m+1}, \dots, \vec{e}_n$ 是U的基

由引理17.5(i)可知

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{2m-1}, \vec{e}_{2m}, \vec{e}_{2m+1}, \dots, \vec{e}_n$ 是

V的基. 由引理17.5(iii)可知

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & & \\ & & -1 & 0 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & -1 & 0 & & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

推论17.1. 设A是斜对称矩阵

则 $A \sim_c \underbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{S_1 \ \ddots \ S_1}^{m} & \\ & 0 \ \ddots \ 0 \end{pmatrix}}_{B}$

证：由设，$f: F^n \times F^n \to F$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \longmapsto (x_1 \dots x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$\because$ A斜对称 $\therefore$ f是斜对称双线性型

由定理10.3 $A \sim_c B$. $\blacksquare$

应用

注：设 A 奇数阶斜对称，则 $\det(A)=0$.

证法1：$\det(A)=\det(A^t)=\det(-A)$

$= (-1)^n\det(A) = -\det(A)$，其中 n 是 A 的阶.

$2\det(A)=0$.

$\because 2\neq 0 \quad \therefore \det(A)=0$

证法2：
$$A=\begin{pmatrix} \underbrace{S \ \ddots \ S}_{m} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因为 n 是奇数，所以 A 的最后一列是零向量，于是 $\det(A)=0$.

命题17.1. 设 $A\in M_n(\mathbb{Q})$，斜对称，n 是偶数，则 $\det(A)$ 是某个有理数的平方。特别地，当 A 中的元素都是整数时 $\det(A)$ 是某个整数的平方.

证：由推论17.1
$$A=P^t\begin{pmatrix} S & & \\ & \ddots & \\ & & S\end{pmatrix}P,\quad \text{其中 } P\in GL_n(\mathbb{Q})$$

$\det(A)=(\det(P))^2$.

当 A 中元素~~全是~~整数时 $\det(A)\in\mathbb{Z}$. 设 $\det(A)=\left(\frac{u}{v}\right)^2$，其中 $u,v\in\mathbb{Z}$，$\gcd(u,v)=1$

则 $v^2\det(A)=u^2$.

~~若~~ $v\neq\pm1$. $\exists$ 素数 p，使得 $p\mid v$

$\Rightarrow p\mid v^2 \Rightarrow p\mid u^2 \Rightarrow p\mid u$

$\Rightarrow p\mid \gcd(u,v) \quad \rightarrow\leftarrow \quad \square$

注 $\sqrt{\det(A)}$ 称为 A 的 pfaffian.

期中考试不专门考的内容

- 第一周的全部内容
- 无穷维线性空间
- 商空间，对偶空间
- §16, §17.

第二章 线性算子

§1 线性映射的矩阵

约定：在本节中 F是域，特征任意.

V, W 是 F上的线性空间.

$\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 是 V 的基

$\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_m$ 是 W 的基

§1.1 矩阵表示的存在唯一性

定理1.1 设 $\varphi\in\mathrm{Hom}(V,W)$ 则 $\exists!\ A\in F^{m\times n}$

使得

$$(\varphi(\vec{e}_1),\cdots\varphi(\vec{e}_n))=(\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_m)A$$

证：<u>存在性</u> $\forall j\in\{1,\cdots,n\}$, $\exists!\ a_{1j},\cdots a_{mj}\in F$

~~使~~ $\varphi(\vec{e}_j)=a_{1j}\vec{\varepsilon}_1+\cdots+a_{mj}\vec{\varepsilon}_m$

即 $\varphi(\vec{e}_j)=(\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_m)\begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}$

于是 $(\varphi(\vec{e}_1),\cdots\varphi(\vec{e}_n))=(\vec{\varepsilon}_1,\cdots\vec{\varepsilon}_m)\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{m1}&&a_{mn}\end{pmatrix}$

令 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 即可

唯一性由 a_{ij} 的唯一性给出 □

定义：称上述矩阵A是 φ 在基底

$\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$; $\vec{\varepsilon}_1,\cdots\vec{\varepsilon}_m$ 下的矩阵

例：$\varphi: F_n[x]\longrightarrow F_n[x]$, $p(x)\longmapsto p'(x)$

$\vec{e}_j=x^{j-1}$, $j\in\{1,2,\cdots n\}$

$\vec{\varepsilon}_j=x^{j-1}$, $j\in\{1,2\cdots n$

$$(\varphi(\vec{e}_1),\cdots\varphi(\vec{e}_n))=(0,1,2x,\cdots(n-1)x^{n-2})$$

$$=(1,x,x^2,\cdots x^{n-1})\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&&0\\0&0&0&&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-1\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}}_{A}$$

推论1.1 设 $\varphi\in\mathrm{Hom}(V,W)$ 且在

$\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$; $\vec{\varepsilon}_1,\cdots\vec{\varepsilon}_m$ 下的矩阵是A

设 $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+\cdots+x_n\vec{e}_n$, $\varphi(\vec{x})=y_1\vec{\varepsilon}_1+\cdots+y_m\vec{\varepsilon}_m$

(i) $\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}$

(ii) 设 $B\in F^{m\times n}$ 使得 $\forall \vec{x}\in V$

$$\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

则 $A=B$.

证：(i) 由 $(\varphi(\vec{e}_1),\cdots \varphi(\vec{e}_n)) = (\vec{\varepsilon}_1,\cdots \vec{\varepsilon}_m)A$

$$(\varphi(\vec{e}_1),\cdots,\varphi(\vec{e}_n))\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = (\vec{\varepsilon}_1,\cdots \vec{\varepsilon}_m)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

等式左边 $= x_1\varphi(\vec{e}_1)+\cdots+x_n\varphi(\vec{e}_n)$

$= \varphi(x_1\vec{e}_1+\cdots+x_n\vec{e}_n)$

$= \varphi(\vec{x})$

$= \vec{y}$

$= (\vec{\varepsilon}_1,\cdots \vec{\varepsilon}_m)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}$

于是 $(\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_m)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix} = (\vec{\varepsilon}_1,\cdots \vec{\varepsilon}_m)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

由坐标的唯一性可知：

$$\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

(ii) ~~设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{k\times n}$~~

由 (i) 和 (ii) 的条件 $\forall x_1\cdots x_n\in F$

$$(A-B)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{rank}(A-B)=0 \Rightarrow A=B.$ ∎

例：$P\in F^{k\times m}$，$\varphi: F^{m\times n}\longrightarrow F^{k\times n}$
$X\longmapsto PX$

求 φ 在 $F^{m\times n}$ 和 $F^{k\times m}$ 的标准基下的矩阵

$$\varphi(X) = PX = (P\vec{X}^{(1)},\cdots,P\vec{X}^{(n)})$$

$$\begin{pmatrix}\overrightarrow{\varphi(X)}^{(1)}\\ \vdots\\ \overrightarrow{\varphi(X)}^{(n)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}P\vec{X}^{(1)}\\ \vdots\\ P\vec{X}^{(n)}\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}P & & \\ & \ddots & \\ & & P\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}\vec{X}^{(1)}\\ \vdots\\ \vec{X}^{(n)}\end{pmatrix}$$

于是 φ 在两组标准基的矩阵为 A

它在 $F^{nk\times nm}$ 中

§1.2 矩阵表示的运算

设 $\varphi\in \mathrm{Hom}(V,W)$，$A_\varphi$ 是 φ 在 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n;\ \vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_m$ 下的矩阵

定理 1.2 $\Phi:\ \mathrm{Hom}(V,W)\longrightarrow F^{m\times n}$

$$\varphi \longmapsto A_\varphi$$

是线性同构：

证：验证线性. $\forall \alpha,\beta\in F$，$\varphi,\psi\in \mathrm{Hom}(V,W)$

$$\Phi(\alpha\varphi+\beta\psi)=A_{\alpha\varphi+\beta\psi}$$

$$(\alpha\varphi+\beta\psi)(\vec{e}_j)=\alpha\varphi(\vec{e}_j)+\beta\psi(\vec{e}_j)$$

$$=\alpha(\vec{\varepsilon}_1,\dots\vec{\varepsilon}_m)\vec{A}_\varphi^{(j)}+\beta(\vec{\varepsilon}_1,\dots\vec{\varepsilon}_m)\vec{A}_\psi^{(j)}$$

$$=(\vec{\varepsilon}_1,\dots\vec{\varepsilon}_m)\left(\alpha\vec{A}_\varphi^{(j)}+\beta\vec{A}_\psi^{(j)}\right)$$

$$\Rightarrow\quad A_{\alpha\varphi+\beta\psi}=\left(\alpha\vec{A}_\varphi^{(1)}+\beta\vec{A}_\psi^{(1)},\ \dots\ \alpha\vec{A}_\varphi^{(n)}+\beta\vec{A}_\psi^{(n)}\right)$$

$$=\alpha A_\varphi+\beta A_\psi$$

$$=\alpha\Phi(\varphi)+\beta\Phi(\psi)$$

$$\Phi(\alpha\varphi+\beta\psi)=\alpha\Phi(\varphi)+\beta\Phi(\psi).$$

Φ 是线性的.

设 $A_\varphi=A_\psi$

则 $\forall\ j\in\{1,\dots,n\}$

$$\varphi(\vec{e}_j)=(\vec{\varepsilon}_1,\dots\vec{\varepsilon}_m)\vec{A}_\varphi^{(j)}$$

$$=(\vec{\varepsilon}_1,\dots\vec{\varepsilon}_m)\vec{A}_\psi^{(j)}=\psi(\vec{e}_j)$$

由第一章定理 6.2 可知 $\varphi=\psi$；单射得证

依据同样的定理，$\forall A\in F^{m\times n}$

$\exists\ \varphi\in \mathrm{Hom}(V,W)$ 使得

$$\varphi(\vec{e}_j)=(\vec{\varepsilon}_1,\dots\vec{\varepsilon}_m)\vec{A}^{(j)}$$

$\Rightarrow\quad \Phi(\varphi)=A.$ 满射得证 □

定理 1.3 设 $\psi\in \mathrm{Hom}(U,V)$，$\vec{\alpha}_1,\dots\vec{\alpha}_s$ 是 U 的一组基，ψ 在 $\vec{\alpha}_1,\dots\vec{\alpha}_s;\ \vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 下的矩阵是 B

$\varphi\in \mathrm{Hom}(V,W)$，$\varphi$ 在 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n;\ \vec{\varepsilon}_1,\dots\vec{\varepsilon}_m$ 下的矩阵是 A

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\varphi\circ\psi"'] & V \arrow[d, "\varphi"] \\ & W \end{tikzcd}$$

则 $\varphi\circ\psi$ 在 $\vec{\alpha}_1,\cdots\vec{\alpha}_s;\ \vec{\varepsilon}_1,\cdots\vec{\varepsilon}_m$ 下的矩阵是 AB

证：验证 $\varphi\circ\psi\in\mathrm{Hom}(U,W)$ 是

$\forall\ \lambda_1,\lambda_2\in F.\ \vec{u}_1,\vec{u}_2\in U$

$$\varphi\circ\psi(\lambda_1\vec{u}_1+\lambda_2\vec{u}_2)=\varphi(\lambda_1\psi(\vec{u}_1)+\lambda_2\psi(\vec{u}_2))$$
$$=\lambda_1\varphi(\psi(\vec{u}_1))+\lambda_2\varphi(\psi(\vec{u}_2))$$
$$=\lambda_1\varphi\circ\psi(\vec{u}_1)+\lambda_2\varphi\circ\psi(\vec{u}_2)$$ 验证完

注意下列运算

设 $\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_k\in V,\ \beta_1\cdots\beta_k\in F$

$$\varphi\left((\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_k)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_k\end{pmatrix}\right)=\varphi(\beta_1\vec{v}_1+\cdots+\beta_k\vec{v}_k)$$
$$=\beta_1\varphi(\vec{v}_1)+\cdots+\beta_k\varphi(\vec{v}_k)$$
$$=(\varphi(\vec{v}_1),\cdots,\varphi(\vec{v}_k))\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_k\end{pmatrix}.$$

$\cancel{\psi\circ\varphi(\vec{e}_j)=\psi(\vec{\varepsilon}}$ $\quad\forall j\in\{1,\cdots s\}$

$$\varphi\circ\psi(\vec{\alpha}_j)=\varphi(\psi(\vec{\alpha}_j))$$
$$=\varphi((\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)\overrightarrow{B}^{(j)})$$
$$=(\varphi(\vec{e}_1),\cdots\varphi(\vec{e}_n))\overrightarrow{B}^{(j)}$$
$$=(\vec{\varepsilon}_1,\cdots\vec{\varepsilon}_m)A\overrightarrow{B}^{(j)}$$

$$\Rightarrow(\varphi\circ\psi(\vec{\alpha}_1),\cdots,\varphi\circ\psi(\vec{\alpha}_s))$$
$$=(\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_m)(A\overrightarrow{B}^{(1)},\cdots A\overrightarrow{B}^{(s)})$$
$$=(\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_m)AB$$ ∎

1.3 ~~线性映射~~ 在不同基底下的矩阵表示

再设 $\vec{e}_1',\cdots,\vec{e}_n'$ 和 $\vec{\varepsilon}_1',\cdots\vec{\varepsilon}_m'$ 是 V 和 W 的基底，且

$$(\vec{e}_1',\cdots,\vec{e}_n')=(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)P$$
$$(\vec{\varepsilon}_1',\cdots\vec{\varepsilon}_m')=(\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_m)Q$$

其中 $P\in GL_n(F)$，$Q\in GL_m(F)$

定理11.4. 设 $\varphi\in \mathrm{Hom}(V,W)$

如果: φ 在 $\vec{e_1},\cdots\vec{e_n};\vec{\varepsilon_1},\cdots\vec{\varepsilon_m}$ 下的矩阵为 A

φ 〃 $\vec{e_1'},\cdots\vec{e_n'};\vec{\varepsilon_1'},\cdots\vec{\varepsilon_m'}$ 下的矩阵为 A'

则 $$A'=Q^{-1}AP$$

证: $\forall j\in\{1,\cdots n\}$ $\varphi(\vec{e_j'})=\varphi((\vec{e_1},\cdots\vec{e_n})\vec{P}^{(j)})$

$=(\varphi(\vec{e_1}),\cdots\varphi(\vec{e_n}))\vec{P}^{(j)}$

$=(\vec{\varepsilon_1},\cdots\vec{\varepsilon_m})A\vec{P}^{(j)}$

$=(\vec{\varepsilon_1'},\cdots\vec{\varepsilon_m'})Q^{-1}A\vec{P}^{(j)}$

于是 $(\varphi(\vec{e_1'}),\cdots,\varphi(\vec{e_n'}))=(\vec{\varepsilon_1'},\cdots\vec{\varepsilon_m'})(Q^{-1}A\vec{P}^{(1)},\cdots Q^{-1}A\vec{P}^{(n)})$

$=(\vec{\varepsilon_1'},\cdots\vec{\varepsilon_m'})Q^{-1}AP.$ ∎

推论11.2 设 $\varphi\in\mathrm{Hom}(V,W)$. 则存在 V 的基底 $\vec{e_1'},\cdots,\vec{e_n'}$ 和 W 的基底 $\vec{\varepsilon_1'},\cdots\vec{\varepsilon_m'}$ 使得 φ 在这组基下的矩阵是 $\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$

证: 设 φ 在 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n};\vec{\varepsilon_1},\cdots\vec{\varepsilon_m}$ 下的矩阵为 $A\in F^{m\times n}$.

由第一学期的打洞引理 $\exists M\in GL_m(F)$, $N\in GL_n(F)$, 使得

$$MAN=\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$$

其中 $r=\mathrm{rank}(A)$

设 $(\vec{e_1'},\cdots,\vec{e_n'})=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})N$

$(\vec{\varepsilon_1'},\cdots\vec{\varepsilon_m'})=(\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_m})M^{-1}$

由定理11.4 φ 在 $\vec{e_1'},\cdots,\vec{e_n'},\vec{\varepsilon_1'},\cdots\vec{\varepsilon_m'}$ 下的矩阵是

$$(M^{-1})^{-1}AN=MAN=\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$$ ∎

注: 设 $\vec{x}=x_1'\vec{e_1'}+\cdots+x_n'\vec{e_n'}$. $\varphi(\vec{x})=y_1'\vec{\varepsilon_1'}+\cdots+y_m'\vec{\varepsilon_m'}$

在上述定理的条件下

$$\begin{pmatrix}y_1'\\ \vdots\\ y_m'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}_{m\times n}\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}_{n\times 1}=\left.\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_r'\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\right\}m$$

§1.4 关于线性映射的若干计算

定义：设 $\varphi \in Hom(V,W)$. φ 的秩定义为

$\dim(\varphi(im(\varphi))$

命题1.1 设 $A\in F^{m\times n}$ 是 φ 在 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$；

$\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_m$ 下的矩阵. 设

$\vec{x}=x_1\vec{e}_1+\dots+x_n\vec{e}_n$, $\vec{y}=y_1\vec{\varepsilon}_1+\dots+y_n\vec{\varepsilon}_n$

分别是 V 和 W 中的任意向量

(i) $\vec{x}\in ker(\varphi) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in V_A$ $\left[A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\right.$ 的解空间$]$

(ii) $\vec{y}\in im(\varphi) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}\in V_c(A)=\langle\vec{A}^{(1)},\dots\vec{A}^{(n)}\rangle$

(iii) $rank(\varphi)=rank(A)$

$\dim ker(\varphi)=\dim V_A$

证：(i) $\vec{x}\in ker(\varphi) \Longleftrightarrow \varphi(\vec{x})=\vec{0}_W$ (定义)

$\Longleftrightarrow A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\left.\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\right\}m$ (推论1.1)

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in V_A$

(ii) $\vec{y}\in im(\varphi) \Longleftrightarrow \exists\vec{x}\in V:\ \vec{y}=\varphi(\vec{x})$ [定义]

$\overset{\exists x_1\dots x_n\in F}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ [推论1.1]

$\Longleftrightarrow \exists x_1\dots x_n\in F,\ \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=x_1\vec{A}^{(1)}+\dots+x_n\vec{A}^{(n)}$

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\in V_r(A)$

(iii) 设 $\rho:\ W\longrightarrow F^n$, $\vec{y}\longmapsto\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

由坐标的定义和唯一性，ρ 是线性同构

$\rho|_{im(\varphi)}:\ im(\varphi)\to V_c(A)$ 也是线性同构

由(ii) $\rho|_{im(\varphi)}$

于是 $\dim(im(\varphi))=rank(A)$. [第一章定理?]

$\Longrightarrow rank(\varphi)=rank(A)$ ☐

由第一章推论?1.

$\dim ker(\varphi)=n-rank(\varphi)=n-rank(A)$

$=\dim V_A$ ☐

例：设 $\varphi:\ \mathbb{R}_n[x]\longrightarrow\mathbb{R}_n[x]$, $p(x)\longmapsto p'(x)$

在标准基下 $A_\varphi=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&&\\ &&&\ddots&n-1\\0&\cdots&\cdots&&0\end{pmatrix}_{n\times n}$. $\Longrightarrow rank(A_\varphi)=n-1$

推论1.3. 设 $\varphi\in \mathrm{Hom}(V,W)$. φ 在 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_n};\ \varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m$ 下的矩阵是 A. 则

(i) φ 是单射 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(A)=n$

(ii) φ 是满射 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(A)=m$

(iii) φ 是双射 $\Leftrightarrow m=n$ 且 A 可逆

证: (i) φ 是单射 $\Leftrightarrow \dim V_A=0$ (命题1.1)

$\Leftrightarrow \mathrm{rank}(A)=n$

(ii) φ 是满射 $\Leftrightarrow \dim V_r(A)=m$

$\Leftrightarrow \mathrm{rank}(A)=m$

(iii) φ 是双射 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(A)=m=n$ ((i),(ii))

$\Leftrightarrow m=n$ 且 $\mathrm{rank}(A)=n$. □

例: 设 $P\in M_n(F)$. $\varphi: M_n(F)\to M_n(F)$
$X\mapsto PX$

$\psi: M_n(F)\to M_n(F)$
$X\mapsto XP$

求 $\mathrm{rank}(\varphi)$ 和 $\mathrm{rank}(\psi)$.

解: 由§1.1节例3可知.

φ 在标准基下的矩阵是

$$\underbrace{\begin{pmatrix} P & & \\ & \ddots & \\ & & P\end{pmatrix}}_{n}{}_{n^2\times n^2}$$

于是 $\mathrm{rank}(\varphi)=n\,\mathrm{rank}(P)$

设 $T: M_n(F)\to M_n(F)$ 是线性同构
$X\mapsto X^t$

(因为 $T\circ T=\mathrm{id}_{M_n(F)}$)

~~断言: $\psi = T\circ\varphi\circ T$~~

~~$T\circ\varphi\circ T(X) = T\circ\varphi$~~

设 $\rho: M_n(F)\to M_n(F)$
$X\mapsto P^tX$

断言: $\psi = T\circ\rho\circ T$

证: $T\circ\rho\circ T(X) = T\circ\rho(X^t) = T(P^tX^t)$

$=(P^tX^t)^t = XP$

$\mathrm{rank}(\psi) = \mathrm{rank}(T\circ\rho\circ T) = \mathrm{rank}(\rho)$

$$=\mathrm{rank}\underbrace{\begin{pmatrix} P^t & & \\ & \ddots & \\ & & P^t\end{pmatrix}}_{n} = n\,\mathrm{rank}(P^t)$$

$= n\,\mathrm{rank}(P)$ □

§1.5 对偶映射

设 V^* 和 W^* 分别是 V 和 W 的对偶空间

$\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$

$$\varphi^*: W^* \longrightarrow V^*$$
$$f \longmapsto f\circ\varphi$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f\circ\varphi"'] & W \arrow[d, "f"] \\ & F \end{tikzcd}$$

称 φ^* 为 φ 的对偶映射

定理1.5 设 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$

(i) $\varphi^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$

(ii) 设 $e_1^*, \dots, e_n^*$ 是 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 的对偶基

$\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_m^*$ 是 $\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_m$ - - - -

~~$\vec{e}_1^*, \dots, \vec{e}_n^*$ 下的像~~

~~则 φ^* 在 $\vec{\varepsilon}_1^*, \dots, \vec{\varepsilon}_m$;~~

设 φ 在 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$; $\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_m$ 下的矩阵为 A

则 φ^* 在 $\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_m^*$; $e_1^* \dots e_n^*$ 下的矩阵为 A^T

证: (i) $\forall \alpha, \beta \in F$, $f, g \in W^*$

~~$[\alpha\varphi^*(f) + \beta\varphi^*(g) = (\alpha f + \beta g)\circ\varphi]$~~

$\alpha\varphi^*(f) + \beta\varphi^*(g) = \alpha(f\circ\varphi) + \beta(g\circ\varphi)$ [φ^*定义]

$= (\alpha f)\circ\varphi + (\beta g)\circ\varphi$ [直接验证]

$= (\alpha f + \beta g)\circ\varphi$ [直接验证]

$= \varphi^*(\alpha f + \beta g)$ [φ^* 定义]

于是 $\varphi^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$

(ii) 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$

断言: $\forall i \in \{1, \dots m\}$ $\quad \varepsilon_i^*\circ\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_k^*$

证: $\forall j \in \{1, \dots, n\}$

$\varepsilon_i^*\circ\varphi(\vec{e}_j) = \varepsilon_i^*\left((\vec{\varepsilon}_1, \dots \vec{\varepsilon}_m)\vec{A}^{(j)}\right)$

$= \varepsilon_i^*\left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj}\vec{\varepsilon}_k\right)$

$= \sum_{k=1}^{m} a_{kj}\,\varepsilon_i^*(\vec{\varepsilon}_k)$

$= \sum_{k=1}^{m} a_{kj}\,\delta_{ik}$ (对偶基定义)

$= a_{ij}$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_k^*\right)(\vec{e_j}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_k^*(\vec{e_j})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\delta_{kj} \quad \text{（对偶基定义）}$$

$$= a_{ij}$$

由第一章定理6.2 此引理成立.

由此引理:

$$(\varphi^*(\varepsilon_1^*), \cdots, \varphi^*(\varepsilon_m^*)) = (e_1^*, \cdots, e_n^*)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= (e_1^*, \cdots, e_n^*)\, A^t. \quad \blacksquare$$

§2 线性算子

记号 设 V 是 F 上 n 维线性空间. $\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n}$ 是 V 上一组基. 把 $\mathrm{Hom}(V,V)$ 简记为 $\mathcal{L}_F(V)$ 或 $\mathcal{L}(V)$. 称 $\mathcal{L}(V)$ 的元素为 V 上的线性算子. 通常以 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ 等来记.

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. $\mathcal{A}$ 在 $e_1, \cdots, e_n$; $e_1, \cdots, e_n$ 下的矩阵 $A \in M_n(F)$. 简称为在 $\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n}$ 下的矩阵. (14)

§2.1 矩阵的相似

定理2.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. $\mathcal{A}$ 在 $\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n}$ 下的矩阵为 A. 设 $\vec{\varepsilon_1}, \cdots, \vec{\varepsilon_n}$ 是 V 的另一组基. 且

$$(\vec{\varepsilon_1}, \cdots, \vec{\varepsilon_n}) = (\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n})\, P$$

则 $\mathcal{A}$ 在 $\vec{\varepsilon_1}, \cdots, \vec{\varepsilon_n}$ 下的矩阵是

$$P^{-1}AP$$

证: 由右定理1.4 中取 $Q = P$ 即可.

定义: 设 ~~$A\in$~~ $A, B \in M_n(F)$. 如果 $\exists P \in GL_n(F)$, 使得

$$B = P^{-1}AP$$

则称 B 与 A 相似. 记为 $B \sim_s A$.