数学归纳法

Peano公理：任何自然数构成的非空集合一定有最小元.

第一数学归纳法：求证一个与自然数n有关的命题$P(n)$

步骤一：验证$P(n)$对于$n=n_0$时成立（一般取$n_0=0$或$n_0=1$）

步骤二：假设$n=k$时，命题$P(n)$成立，即命题$P(k)$成立（k是一个未知数）无须~~$k>$~~

步骤三：证明命题$P(n)$在步骤二的假设前提条件下，对于$P(k+1)$也成立.

若经过以上三步，我们可得出结论：$P(n)$对于所有$n\geq n_0$且$n\in\mathbb{N}$都成立.

第一数学归纳法的正确性证明：

（反证法）假设数学归纳法不对，即$\exists\ n\in \overset{\mathbb{N}\ \text{or}}{\mathbb{Z}^+}$且$n\geq n_0$ s.t. 命题$P(n)$不成立. 定义集合 $S=\{s\in \overset{\mathbb{N}\ \text{or}}{\mathbb{Z}^+}$且$s\geq n_0 \mid P(s)$不成立$\}$，则由假设可知$S\neq\varnothing$. 由Peano公理，集合$S$中有最小元设为$s_0$，则$s_0\in\mathbb{Z}^+$且$s_0\neq n_0$（根据归纳法第一步已验证$P(n)$对于$n=n_0$成立）$\therefore s_0>n_0$. 根据$s_0$是使得$P(s)$不成立的最小元，$\therefore P(s_0-1)$成立. 由归纳法第三步，若$P(s_0-1)$成立，则$P(s_0)$成立，与$s_0\in S$矛盾. 故$S=\varnothing$. $\therefore \forall n\in\mathbb{Z}^+$且$n\geq n_0$，都有命题$P(n)$成立.

第二数学归纳法（完全数学归纳法）

步骤一：验证$P(n)$对于$n=0$时成立.

步骤二：假设对$\forall m\in\mathbb{N}$，有$P(m)$对满足$m\leq k$的所有m成立（k是一个未知数）

步骤三：证明~~$P(k+1)$~~ $P(n)$在步骤二的假设前提条件下，对于$P(k+1)$也成立.

若经过以上三步，我们可得出结论：$P(n)$对所有$n\in\mathbb{Z}^+$都成立.

第二与第一的区别在于步骤二. 问既然步骤二中的假设，很显然第二归纳法包含第一归纳法，为什么还要用更复杂的假设？什么时候用第一数学归纳法，什么时候用第二数学归纳法，取决于在步骤三的证明中，需要用到哪些条件，如果在步骤三中要用到对所有的$m<k$，$P(m)$都成立这一条件，我们便选择第二数学归纳法. 可自己思考第二数学归纳法的正确性的证明.

二项式定理

1. 排列与组合

有n个小球分别标号$1,2,\cdots,n$

1) 取出r个（$r\le n$），排成一列，按一定顺序，得到不同的排列方式的个数称为排列数，记为

$$A_n^r=\frac{n!}{(n-r)!}=n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

2) 取出r个（$r\le n$）小球排成一列，不计顺序，得到不同的组合方式个数称为组合数，记为

$$C_n^r=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

特别地，规定$\binom{n}{0}=1$　　$\binom{n}{r}=0$ ($r>n$)

基本性质　1) $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$

2) $\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}$

3) $\binom{n}{r}\cdot\binom{r}{k}=\binom{n}{k}\cdot\binom{n-k}{r-k}=\binom{n}{r-k}\cdot\binom{n-r+k}{k}$　　$k\le r\le n$

2. 二项式定理

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^ib^{n-i}$$

证明：组合上看　$(a+b)^n=\overbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}^{n个}$

对于a^ib^{n-i}的系数，相当于从n个括号中选出i个括号，不计顺序，取a相乘，其余括号取b相乘，与组合的定义相同，故a^ib^{n-i}的系数为$\binom{n}{i}$

数学归纳法：1) 当$n=1$时，等式右边$=\binom{1}{0}a^0b^1+\binom{1}{1}a^1b^0=a+b=$左边

（验证$n=1$时，命题成立）

2) 当$n=k$时，假设有$(a+b)^k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^ib^{k-i}$成立．（$k$作为未知数）

3) 当$n=k+1$时，$(a+b)^{k+1}=(a+b)(a+b)^k=(a+b)\cdot\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^ib^{k-i}$

$$=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{i+1}b^{k-i}+\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^ib^{k-i+1}\text{（合并同类项）}$$

$$=\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}a^{i+1}b^{k-i}+\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}a^ib^{k-i+1}+\binom{k}{k}a^{k+1}+\binom{k}{0}b^{k+1}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i-1}a^ib^{k-i+1}+\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}a^ib^{k-i+1}+a^{k+1}+b^{k+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\left(\binom{k}{i-1}+\binom{k}{i}\right)a^i b^{k-i+1} + a^{k+1}+b^{k+1}$$ (由班长定理)

$$= \sum_{i=1}^{k}\binom{k+1}{i}a^i \cdot b^{k-i+1} + a^{k+1}+b^{k+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}a^i b^{k-i+1}$$

由数学归纳法, $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i}$ 对 $\forall n\in \mathbb{Z}^+$ 都成立.

推论 (1) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$　　(2) $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}=0$

例1: 数学归纳法证明等差数列的前n项和公式. $S_n=n\cdot a_1+n\cdot(n-1)d/2$.

1). 当 $n=1$ 时. $S_n=1\cdot a_1+1\cdot 0\cdot d/2=a_1=S_1$ (验证 S_1 成立)

2) 假设当 $n=k$ 时. $S_k=k\cdot a_1+k\cdot(k-1)\cdot\frac{d}{2}$.

3). 当 $n=k+1$ 时. $S_{k+1}=a_{k+1}+S_k=a_1+(k)d+k\cdot a_1+k(k-1)d/2$

$$=(k+1)a_1+\frac{2k+k(k-1)}{2}\cdot d$$

$$=(k+1)a_1+\frac{k(k+1)}{2}\cdot d$$

由数学归纳法. $S_n=n\cdot a_1+n(n-1)\frac{d}{2}$ 对 $\forall n\in \mathbb{Z}^+$ 都成立.

定义 $P_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots+(n-1)^k+n^k$, $k=1,2,3$, 用数学归纳法证明　　(思考题)

$$P_5+P_7=2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^4$$

二重归纳法原理

a和b是自然数(a, b经常在0,1中取值),对$\forall m, n \in \mathbb{N}$,且$m \geq a$, $n \geq b$,有命题$Q(m,n)$

一步:1)验证$Q(a,b)$成立.

2)验证对$\forall m \geq a$和$\forall n \geq b$, $Q(m,b)$和$Q(a,n)$成立;

3)假设$Q(m-1,n)$成立,且$Q(m,n-1)$正确(成立)

4)证明$Q(m,n)$正确(成立)

若4)证得,则可得出结论$Q(m,n)$对$\forall m, n \in \mathbb{N}$,且$m \geq a$, $n \geq b$,都成立.

3)' 自然数对(s,t),若对$\forall s,t \in \mathbb{N}$,且$m \geq s \geq a$, $n \geq t \geq b$,满足满足$m+n > s+t$,假设$Q(s,t)$成立.

4)'证明$Q(m,n)$成立.

思考:为什么等价?思考题:二重归纳法原理正确性的证明.

Dickson引理:定义$T_n(\vec{x}) = \{x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdots x_n^{e_n} \mid e_i \in \mathbb{N}, i=1,2,\cdots,n\}$, $x_1, \cdots, x_n$是未定元,即n个不同的未知数,设$X \subset T_n(\vec{x})$是一个非空集合,则存在一个有限的子集$Y \subseteq X$,使得X中的每个项都是Y中某个项的倍式.

证明:第一步:当$n=1$时,即未知数只有1个时,$T_1(\vec{x}) = \{x_1^{e_1} \mid e_1 \in \mathbb{N}\}$, $X \subseteq T_1(\vec{x})$,

$\therefore X$是x_1的某些次幂的集合,由Peano公理,选择最小次幂的x_1^k,则令$Y = \{x_1^k\}$, X中每个项都是Y中某项的倍式.

第二步:取定X中任意一个项$p_0 = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdots x_n^{e_n}$(此处的$e_1, \cdots e_n$已取定,与上文的$e_1, \cdots e_n$不同)

则X中不能被p_0整除的项可以分成$\sum_{i=1}^{n} e_i$个类:

$$X_{ij} = \{x_1^{k_1} \cdots x_{i-1}^{k_{i-1}} x_i^j x_{i+1}^{k_{i+1}} \cdots x_n^{k_n} \in X\} \quad i=1,\cdots,n;\ j=0,1,\cdots,e_i-1$$

令$X_{ij}' = \{x_1^{k_1} \cdots x_{i-1}^{k_{i-1}} x_{i+1}^{k_{i+1}} \cdots x_n^{k_n} \mid x_1^{k_1} \cdots x_{i-1}^{k_{i-1}} x_i^j x_{i+1}^{k_{i+1}} \cdots x_n^{k_n} \in X_{ij}\}$

假设当$n=k-1$时,对$X \subset T_{k-1}(\vec{x})$,存在有限子集$Y \subseteq X$,使得$X$中的每个项都是$Y$中某个项的倍式.

第三步:由假设,对于X_{ij}'可知,X_{ij}'中存在有限子集Y_{ij}'使得X_{ij}'的每个项都是Y_{ij}'的某项的倍式,将Y_{ij}'中每一项乘以x_i^j,得到X_{ij}的有限子集Y_{ij},且有X_{ij}中每个项都是Y_{ij}的某一项的倍式,Y_{ij}的个数是$\sum_{i=1}^{n} e_i$

$Y = \bigcup_{ij} Y_{ij} \cup \{p_0\}$是所找的$X$中的有限子集.