

一次习题课 20分钟 回顾上课内容
100分钟 40分钟 讲作业题
40分钟 拓展知识面

第一次习题课大纲

(第一次不讲习题, 20分钟回顾上课 80分钟 拓展知识面)

上课内容: ①什么是相容的线性方程组? 什么是相容的线性方程组? 是相容的?

②如何判断一个增广矩阵对应的线性方程组是相容的? 是相容的?

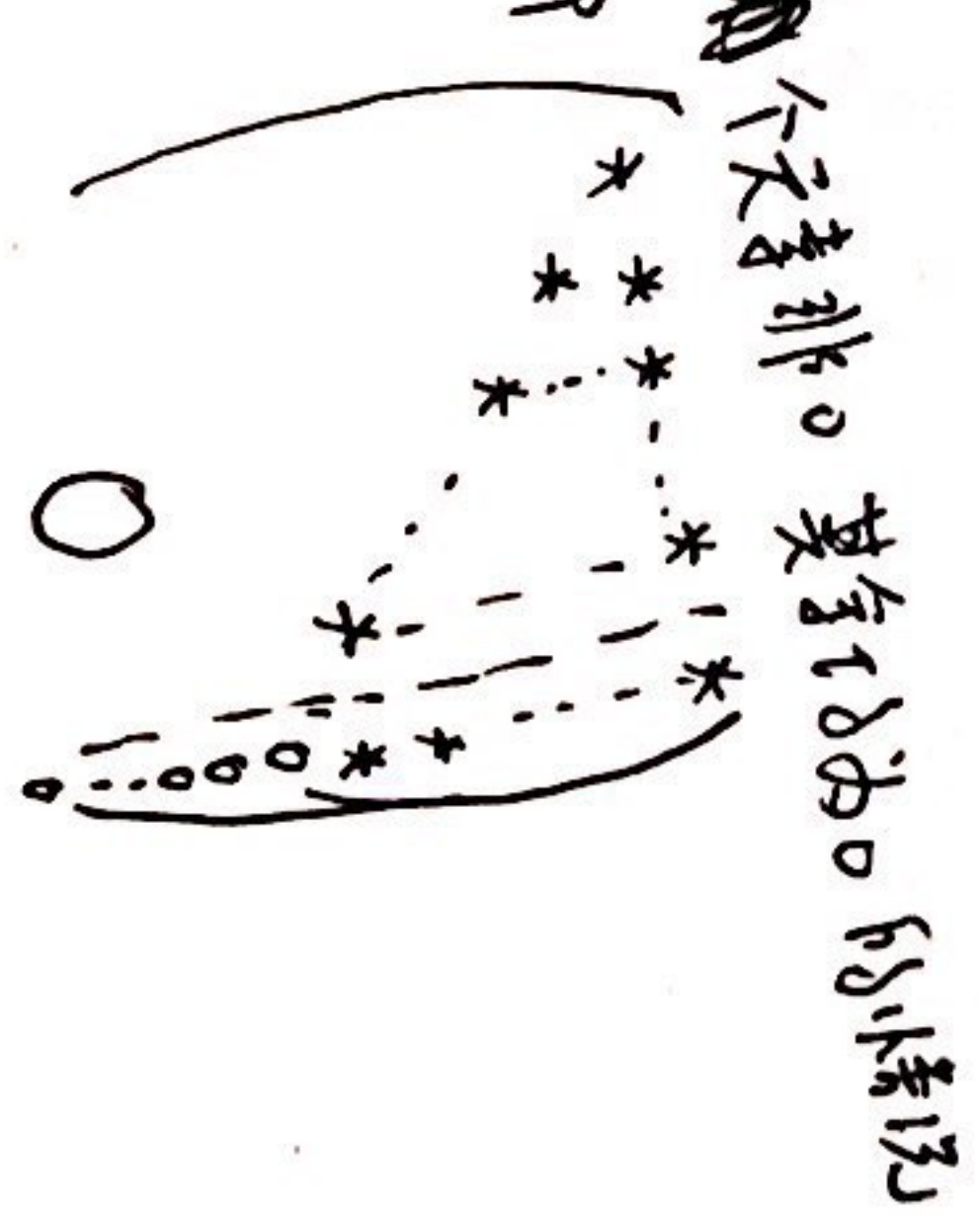
①线性方程组有解即为相容的, 有唯一解即为相容的

②在不引入新的定义下, 判断线性方程组的相容性, 相容性只能从 Gauss 消元法出发

Thm1 对增广矩阵做三种初等变换 (通过三种初等变换)

Thm2 一定可以化增广矩阵化成阶梯形 (通过三种初等变换)

Thm3 对于阶梯形增广矩阵 相容性只需要看是否出现某一行除了最后一个元素非0 其他都为0的情况



拓展知识面. 简述集合论基本内容以及数学归纳法的探索

抽象高中所做的简单集合论, 我们从序关系开始. (默认大家都熟知集合论八大公理)

Def: S 是一个集合, 我们在 S 上定义一个关系 " $\leq$ " 其满足

1) 自反性 $a \leq a \quad \forall a \in S$

2) 反对称性 $a \leq b, b \leq a \implies a = b$

3) 传递性 $a \leq b, b \leq c \implies a \leq c$

那么 我们称 $(S, \leq)$ 为一个偏序集, " $\leq$ " 为 S 上的序关系.

Def 若偏序集 $(S, \leq)$ 满足以下两条件

- 1) $\forall a, b \in S \quad a \leq b$ 与 $b \leq a$ 至少有一个成立 (即 $(S, \leq)$ 是一链)
 - 2) $\forall A \subseteq S$ 若 $\exists a \in A$ 满足 $\forall b \in A \quad a \leq b$ (即最小元存在)
- 那么我们称 $(S, \leq)$ 为良序集

Example 1. $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}$

容易看成通常的大小关系下, $(\mathbb{Z}, \leq), (\mathbb{Q}, \leq)$ 不是良序集
 $(\mathbb{N}, \leq)$ 是良序集

2. $(A, \leq_A), (B, \leq_B)$ 是良序集 $A \cap B = \emptyset$

我们定义 $A \cup B$ 上的一个序关系 使得其也是一个良序集

$\forall x, y \in A \cup B$ ① $x, y \in A$ 则 $x \leq y \iff x \leq_A y$

② $x, y \in B$ 则 $x \leq y \iff x \leq_B y$

③ $x \in A, y \in B$ 则 $x \leq y$

④ $x \in B, y \in A$ 则 $y \leq x$

很容易验证 $(A \cup B, \leq)$ 是一个良序集 我们一般称这个良序集为 $A+B$

Zorn 引理, 良序原理

Def: $(S, \leq)$ 为偏序集 $A \subseteq S$ 称为一个链

若 $\forall a, b \in A \quad a \leq b$ 或 $b \leq a$ 至少有一个成立

Def: $(S, \leq)$ 为偏序集 $S \in S$ 为极大元 若 $\forall a \in S$ 满足 $S \leq a \implies S = a$

Def, $(S, \leq)$ 为偏序集 $A \subseteq S$ 为 A 的上界是说 $\forall a \in A, a \leq S$ (注意这里 S 不一定在 A 中)

Zorn 引理: 设的序是 $(S, \leq)$ 格有限满足任意链有上界 那么 $(S, \leq)$ 中有极大元

良序原理: 任意集合 S 均存在一个序关系 " $\leq$ " 使得 $(S, \leq)$ 为良序集

值得注意的是这两个集合论的公理是互相等价的.

基数:

在所有集合上定义一个等价关系 " $\sim$ " 若 A, B 集合 ~~存在~~ 存在 $f: A \rightarrow B$ 为双射 则我们称 $A \sim B$

那么在所有集合这个类模去这个等价关系得到的等价类称为 ~~基数~~ 基数.

换句话说 A 为一个集合 $|A|$ 为 A 所在的等价类 记为 A 的基数 (里面包含所有与 A 有双射的集合)

即 $|A| = |B| \iff \exists f: A \rightarrow B$ 为双射

而 $|A| < |B|$ 是说 $\exists f: A \rightarrow B$ 是单射 或者 $B \rightarrow A$ 是满射

Thm (Cantor) $|X| < |P(X)|$

意思是说 不存在 $f: X \rightarrow P(X)$ 的满射

($P(X)$ 是 X 的幂集 即 X 的所有子集构成的集合)

为什么上面那个命题可以证明 $|X| < |P(X)|$ 呢?

这是因为我们有 ~~若~~ $\forall A, B$ 为集合 那么存在 $f: A \rightarrow B$ 为单射, 那么存在 $f: B \rightarrow A$ 为单射

即 $|A|, |B|$ 总能比大小, 这是基数的基本性质 (事实上这个原理与 Zorn 引理, 良序原理等价)

那么特别地 我们把所有与 N 等价的集合称为可数集, 与 N 不等价的无限集称为不可数集

Example: 1. $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ 为可数集, $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ 为不可数集 且 $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ 与 $P(N)$ 等价

2. A, B 为无限集 若 B 为可数集 则 $A \cup B$ 与 A 等价 即 $|A \cup B| = |A|$

Def 一个三元组 (X, x, f) 为 Peano 结构若满足

- 1) x 为一个集合, $x \in X$, $f: X \rightarrow X$ 映射
- 2) x 不在 f 的像集中

3) f 为单射

4) (归纳原理) 若 $A \subseteq X$ 满足 $x \in A$ 且 $\forall a \in A \Rightarrow f(a) \in A$

那么 $A = X$

$$N \xrightarrow{\quad} N$$

Peano 公理即是指 $(N, 0, +1)$ 为 Peano 结构 (注意 $+1$ 映射的像为 $x \mapsto x+1$) 而基本的数学归纳法即是在这个 Peano 公理上

1. 数学归纳法 设 P 为关于 N 的一个性质 其满足 1) $P(0)$ 正确
2) $P(n)$ 正确 $\Rightarrow P(n+1)$ 正确

那么我们有 $P(n)$ 均正确 $\forall n \in N$

2. 强数学归纳法 设 P 为关于 N 的一个性质 其满足 1) $P(0)$ 正确
2) $P(n)$ 正确 $\forall n < m \Rightarrow P(m)$ 正确

那么我们有 $P(n)$ 均正确 $\forall n \in N$

我们利用一个小 trick 就能推出强数学归纳法与弱数学归纳法没有区别

Lemma 设 P 为 N 的一个性质 其满足 $P(n)$ 正确 $\Rightarrow P(n+1)$ 正确 那么 $\forall n < m$ $P(n)$ 正确 $\Rightarrow P(m)$ 正确

Pf: 我们定义一个新的关于 N 的性质 Q $Q(n)$ 正确是指 $\forall n < m$ $P(n)$ 正确

由 $P(n)$ 正确 $\Rightarrow P(n+1)$ 正确 我们有 $Q(m)$ 正确 $\Rightarrow Q(m+1)$ 正确 从而 $Q(n)$ 均正确 且 $Q(0)$ 表示正确 因为 0 没有前驱 从而 $Q(0)$ 表示正确 且 $Q(0)$ 表示正确 且 $Q(0)$ 表示正确

3. 良序数性质

设 P 为关于良序集 $(S, \leq)$ 的一个性质

若满足 $\forall s < a \quad P(s)$ 正确 $\Rightarrow P(a)$ 正确

($s < a$ 是指 $s \leq a$ 但是 $s \neq a$)

那么 $P(s)$ 对 $\forall s \in S$

1, 2, 3 的一些变体 ① $P(n)$ 正确 $\Rightarrow P(2n)$ 与 $P(2n+1)$ 正确

那么 $P(n)$ 对 $\forall n \in \mathbb{N}$

② 考察 $\mathbb{N}$ 的一个子集 S 且 S 中存在最小元 s

若 $(S, \leq)$ 也是良序集

那么 $\mathbb{N}$ 上那一套性质可以照搬到 S 上去

4. 多重归纳法 (3 个特殊情况)

若 P 是关于 $\underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}}_{k \text{ 个}}$ 的性质 若 1) $P(\underbrace{0, \dots, 0}_{k \text{ 个}})$ 正确

2) $P(n_1, n_2, \dots, n_k)$ 正确 $\Rightarrow P(n_1+1, n_2, \dots, n_k)$

$P(n_1, n_2+1, \dots, n_k)$

$P(n_1, n_2, \dots, n_k+1)$ 正确

那么 P 对任意 $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}$ 都正确

若 1) P 对 $\mathbb{N}$ 的一个无限子集正确

2) $P(n+1)$ 正确 $\Rightarrow P(n)$ 正确

5. 反归纳法 设 P 为关于 $\mathbb{N}$ 的性质

那么 P 对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 都正确

这一节是 $\mathbb{N}$ 的一个基本性质 我们证明 $\mathbb{N}$ 是一个良序