偏序

~~1.偏序~~

1. Definition：称X上的一个二元关系"≤"为一个偏序，如果以下条件满足：

(1) $x\le x$（自反性）；

(2) 如果$x\le y$且$y\le x$，则$x=y$（反对称性）；

(3) 如果$x\le y$且$y\le z$，则$x\le z$（传递性）。

我们称$(X,\le)$为一个偏序集，"≤"为X上的偏序关系。

2. Definition：设$(X,\le)$为一个偏序集，如果 $\forall x,y\in X$ 且$(x\ne y)$都有 $x\le y$或$y\le x$两者中一个成立，则称"≤"是X上的全序或线性序，$(X,\le)$为一个全序集。

3. Definition：设$(X,\le)$为一个全序集，如果$\forall A\subseteq X$是X的子集，$\exists a\in A$ s.t. $\forall b\in A$有$a\le b$（即最小元存在），则称"≤"是X上的良序，$(X,\le)$为一个良序集。

例：1. 集合包含关系①、自然数的小于等于关系②、自然数的整除关系③、整数的小于等于关系④，都是偏序。

2. ①、③不是全序，②、④是全序

3. ④不是良序，②是良序

4. proposition：全序"≤"是良序的充分必要是：1) X的任何严格单调下降序列都有限 ~~(思考题)~~。2) 超限归纳法在整个全序集$(S,\le)$上成立。

作业中的几个问题：1) 从$Q(m_0-1,n_0)$成立直接推出$Q(m_0,n_0-1)$成立

2) 直接说数对(m,n)有最小元？

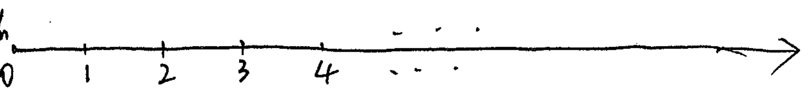
3) 两个讲义中二重数学归纳法的区别。（思考题的意义）

请思考：1. 反证法证明第一数学归纳法成立时，定义集合S是所有使$P(n)$不成立的~~集合的~~元素的集合，找到S中最小元。当S扩展为数对(m,n)构成的集合时，什么是最小元？

2. 第一数学归纳法中为什么要验证$n=n_0$成立时，$P(n_0)$成立。

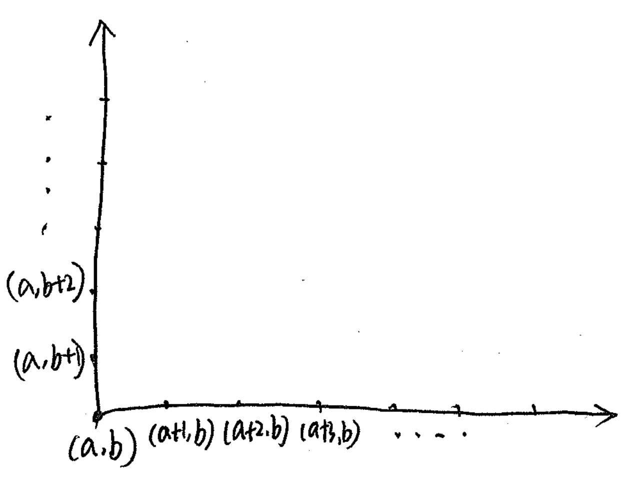
3. 第一数学归纳法中为什么假设$n=k$时成立？，$P(k)$成立。

第一数学归纳法



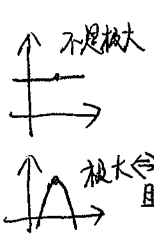
在左边的点总是小于等于右边的点。小于~~不~~等于是一个偏序关系，且是一个良序关系

二重数学归纳法



如果扩展成二维，这样的偏序关系应该是怎样？它是否是一个良序？

答案：1. 最小元~~概~~存在的前提是存在一个偏序集，首先要有一个序。



Definition：偏序集$(X,\le)$中的元素x称为最小元（最大元），如果对X中任意元素y都有$x\le y$ ~~$y\le x$~~（相应的$y\le x$）；偏序集$(X,\le)$中的元素x称为极大的，~~如果X中~~（极小的），如果X中除了x，没有其它元素y使得$x\le y$（$x\ge y$）。

当$(X,\le)$是个良序集，~~任何X~~由良序的定义，任何X的子集都有最小元存在，此时，看数学归纳法中，

定义集合$S=\{(s_1,s_2)\in \mathbb{N}^2 \mid$ ~~s~~ 使$Q(s_1,s_2)$不成立$\}$，若找到$\mathbb{N}^2$的良序，才可找到最小元。

~~另~~ 令"$\le_1$"是$\mathbb{N}^2$上的序： $(m_1,n_1)\le_1(m_2,n_2):=\begin{cases} m_1<m_2; & \text{or} \\ m_1=m_2 \text{且} n_1\le n_2 \end{cases}$

证明：① 反自性显然；

② 反对称性显然；

③ 传递性显然。∴"$\le_1$"是偏序

④ 任何不同的两个元素$(m_1,n_1),(m_2,n_2)\in\mathbb{N}^2$都有$(m_1,n_1)\le_1(m_2,n_2)$或$(m_1,n_1)\ge_1(m_2,n_2)$成立，"$\le_1$"是全序。

⑤ 最小元存在，先找最小的m，再找最小的n，"$\le_2$"是良序

~~答案~~ 令"$\le_2$"是$\mathbb{N}^2$上的序 $(m_1,n_1)\le_2(m_2,n_2):=\begin{cases} m_1+n_1<m_2+n_2 & \text{or} \\ m_1+n_1=m_2+n_2 \text{且} m_1<m_2 & \text{or} \\ m_1+n_1=m_2+n_2 \text{且} m_1=m_2 \text{且} n_1=n_2 \end{cases}$

证明：① 反自性，反对称性，传递性显然。

② ~~证明~~ "$\le_2$"是全序，证明略。

③ "$\le_2$"是良序，证明略。

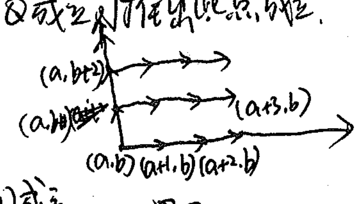
故作业题中，有人先找最小m，再找最小n，或有人先找最小$m+n$，再找最小~~n~~ m都对。

答案2：为什么要验证$n=n_0$成立？因为n_0是最左边的点。

在第二重数学归纳法中，要验证$Q(a,b)$成立，因为(a,b)是上述序定义下最小的点。

答案3：为什么要假设$n=k$时~~成立~~$P(k)$成立？因为对于一维数轴，只能从左往右单调递增。

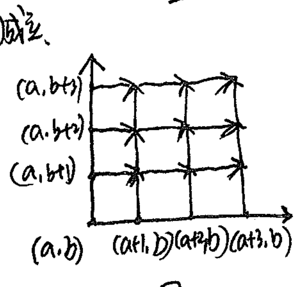
在二重数学归纳法中，若可由~~假设~~或左边的点处Q成立推出此点成立，则~~已知$Q(a,b)$成立~~已知$Q(a,b)$成立，可推出$Q(a+x,b)$都成立，其中$x\in\mathbb{N}$。若已知下方的点处Q成立可推出此点成立，则已知$Q(a,b)$成立，可推出$Q(a,b+y)$都成立，其中$y\in\mathbb{N}$。



图一

如若不然，只有~~左边~~左边的点与下边的点~~同时成立时~~处Q同时成立时，才可推出Q在此点成立，则，还需验证所有的$Q(m,b)$，$Q(a,n)$成立（$\forall m,n\in\mathbb{N}$），以及假设$Q(m-1,n)$和$Q(m,n-1)$同时成立，才可证明$Q(m,n)$成立。

这也回答了两个讲义中二重数学归纳法的区别问题，并可扩展到多重。



图二

同时回答了两个二重数学归纳法中的等价性问题。

什么时候用图一的方法,什么时候用图二的方法,取决于已知$Q(m-1,n)$成立,是否能推出$Q(m,n)$成立,也就是说取决于命题Q本身

(补充:全序"$\le$"是良序的充要条件是:X的任何严格单调下降序列都有限.

证明:1)(已知良序)"$\Leftarrow$" 则对X的任一非空子集A,用选择公理每次从A中选出一个元素,使得从第二次开始每次选出的元素都比前一次的小,则选出的所有元素构成一严格递减序列,该序列必定在有限步内终止,但序列终止的唯一可能是选出了一个元素x使得A中没有比x小的元素,从而x是A中的最小元素.

2)"$\Rightarrow$":X的严格单调下降序列为A,则A的第一个元素x_0.第二个元素满足$x_0>x_1$,且$\forall y\in A$,$y\ne x_0,x_1$,则$y<x_1$,同样地令$A_1=\{x_0,x_1\}$,第三个元素x_2满足$x_0>x_1>x_2$,且$\forall y\in$ ~~A.~~ $A-(A_1\cup\{x_2\})$,有$y<x_2$,依次下去.$\because$A有最小元设为x,则$\forall y\in A$,有$y\ge x$.即不存在$y\in A$ s.t. $y<x$成立.故这一过程是有限的.且遍历了A中所有元素.所以A有限。)   参考良序~~定理~~与超限归纳原理的等价性.

作业2答案:2.(3) $\forall j\in J$, $f^{-1}(A_j)\subset f^{-1}(\bigcup_{j\in J}A_j)$ $\therefore \bigcup_{j\in J}f^{-1}(A_j)\subset f^{-1}(\bigcup_{j\in J}A_j)$

$\forall x\in f^{-1}(\bigcup_{j\in J}A_j)$ $\therefore f(x)\in\bigcup_{j\in J}A_j$ $\therefore \exists j_0\in J$. s.t. $f(x)\in A_{j_0}$

$\therefore x\in f^{-1}(A_{j_0})$ $\therefore f^{-1}(\bigcup_{j\in J}A_j)\subset\bigcup_{j\in J}f^{-1}(A_j)$. 得证

(4) 正确: $\forall x\in f^{-1}(\bigcap_{j\in J}A_j)$ 则 $f(x)\in\bigcap_{j\in J}A_j$ $\therefore$对$\forall j\in J$ $f(x)\in A_j$成立.

即$x\in f^{-1}(A_j)$成立 $\therefore x\in\bigcap_{j\in J}f^{-1}(A_j)$ $\therefore f^{-1}(\bigcap_{j\in J}A_j)\subset\bigcap_{j\in J}f^{-1}(A_j)$

$\forall x\in\bigcap_{j\in J}f^{-1}(A_j)$ 则 $x\in f^{-1}(A_j)$对$\forall j\in J$都成立.

$\therefore f(x)\in A_j$ 对 $\forall j\in J$ 都成立 $\therefore$ $f(x)\in\bigcap_{j\in J}A_j$ $\therefore x\in f^{-1}(\bigcap_{j\in J}A_j)$. 得证

3题由映射的定义可知.

4.(1) $\forall(x,z)\in graph(g\circ f)$,则 $g\circ f(x)=z$ $\therefore f(x)\in g^{-1}(z)$. $\therefore$令$y=f(x)$.则

$\because f$是映射 $\therefore graph(f)$满足$\forall x\in X$. $\exists y\in Y$, s.t. $(x,y)\in graph(f)$

又$\because y\in g^{-1}(z)$ $\therefore g(y)=z$ $\because g$是映射.故所有$z\in Z$ s.t. $(y,z)\in graph(g)$

成立的z是唯一的.故$\exists y$ s.t. $(x,y)\in graph(f)$. $(y,z)\in graph(g)$

$\therefore (x,z)\in graph(g)\circ graph(f)$;

$\forall(x,z)\in graph(g)\circ graph(f)$,则$\exists y$ s.t. $(x,y)\in graph(f)$, $(y,z)\in graph(g)$

$\therefore y=f(x)$ $z=g(y)$ $\therefore z=g\circ f(x)$ $\because g\circ f$是映射 $\therefore (x,z)\in graph(g\circ f)$

$\therefore graph(g\circ f)=graph(g)\circ graph(f)$

4.(2) f为双射时，R^{op}才能成为一个映射的图像

(3) "$\Rightarrow$" f为单射已知，故 $\forall (x,x')\in R^{op}\circ R$ $\exists y\in Y$, s.t. $\overset{(x,y)}{\checkmark}\in R$ 且 $(y,x')\in R^{op}$

即 $(x,y)\in R$，$(x',y)\in R$ 由f是单射，故 $x=x'$，由 (x,x')的任意性

$R^{op}\circ R=\{(x,x)\mid x\in X\}=id_X$

"$\Leftarrow$" 若f不是单射，假设 $f(x)=f(x')$，且 $x\neq x'$，那么 $(x,x')\in R^{op}\circ R=id_X$ 矛盾，$\therefore f$为单射.

(4) "$\Leftarrow$" $id_Y=R\circ R^{op}$ 已知，若 $\exists y\in Y$ s.t. $\forall x\in X$，$y\neq f(x)$，即f不是满射.（假设）

$\because (y,y)\in id_Y=R\circ R^{op}$ $\therefore \exists x\in X$. s.t. $(y,x)\in R^{op}$ 且 $(x,y)\in R$ $\therefore y=f(x)$ 矛盾

故f为满射.

"$\Rightarrow$" 若f为满射，$\forall (y,y')\in R\circ R^{op}$ $\exists x\in X$. s.t. $(y,x)\in R^{op}$，$(x,y')\in R$

$\therefore y=f(x)=y'$ 由 (y,y')的任意性 $\therefore R\circ R^{op}=id_Y$

(5) f为单射时，定义 $g: Y\to X$ 取定 $x_0\in X$，为

$$g(y)=\begin{cases} x_0 & \text{若 } y\notin f(X) \\ x & \text{若 } y=f(x) \quad (\text{一个}y\text{只对应一个原象}x) \end{cases}$$

那么 $graph(g)=\{(y,g(y))\mid y\in Y\}$ 显然 $R^{op}=\{(f(x),x)\mid x\in X\}\subset graph(g)$

而 $graph(g)\circ R=graph(g)\circ graph(f)=graph(g\circ f)$

$\forall x\in X$ $g\circ f(x)=g(y)=x$ $\therefore (x,x)\in graph(g\circ f)$ $\therefore id_X\subset graph(g\circ f)$

而一个图像包含 id_X 它一定是恒同映射对应的图像，故 $g\circ f=id_X$

(6). 若f为满射，定义 $g: Y\to X$

$g(y)=x$. x为任取$f^{-1}(y)$中的一个元素

$\therefore \{(y,x)\mid f(x)=y,\ \forall y\in Y\}=graph(g)\subset R^{op}$ 因为R^{op}中还包含没有取到的那些$f^{-1}(y)$中元素

$\therefore graph(f\circ g)=graph(f)\circ graph(g)\subset R\circ R^{op}=id_Y$

$\therefore f\circ g=id_Y$ 因为一个映射的图像包含于 id_Y，那么一定是恒同映射对应的图像.

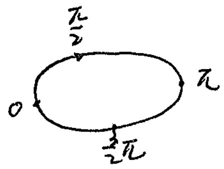
(7) $g\circ f=id_X$. 设 $f(x)=f(x')$ $\therefore x=g\circ f(x)=g\circ f(x')=x'\Rightarrow f$为单射

$\forall x\in X$. 那么 ~~$g(f(x))=x$~~ $\exists f(x)$. 使 $g(f(x))=x$ $\therefore \Rightarrow g$为满射

粘合（代数是能写下来的几何，几何是能画出来的代数）

一维轴的粘合　$S=\{x|x\in R\}$　定义划分 ~~P: {{x| sinx∈(-1,1)}}~~

$P=\{\{x|\sin x\in[-1,1)\},\{x|\sin x=1\}\}$



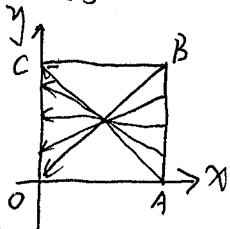
二维粘合　Möbius带（变成三维图形）

设集合 $S=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R},\ 0\le x\le1,\ 0\le y\le1\}$

定义划分 $P:=\{\underbrace{\{(a,b)|a\in(0,1),b\in[0,1]\}}_{P_1},\underbrace{\{(0,b),(1,1-b)|b\in[0,1]\}}_{P_2}\}$

对应的映射　~~f(x)=f((x,y))=~~

$$f(x,y)=\begin{cases}(x,y) & x\in(0,1),\ y\in[0,1]\\ (0,y) & x=0,\ y\in[0,1]\\ \cancel{(1-x,1-y)}\ (0,1-y) & x=1,\ y\in[0,1]\end{cases}$$



对应的等价关系"~"：1)若$(x,y)\sim(x',y')$，则(x,y)与(x',y')在一个划分里。

2)若$(x,y)\sim(x',y')$，则$f(x',y')=f(x,y)$

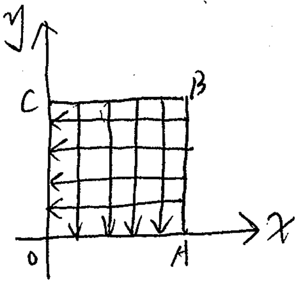
映射：$S/\sim\ \to P$：$(x,y)\to P_i=[(x,y)]$　是双射 $\because S/\sim\ =P$（这里的P_i不只有两个，而上述P_1,P_2表示两大类）

粘合即把象相同的原象看作一个元素（粘起来）。粘合是指定义域的粘合

例：1. 环面

设集合 $S=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R},\ 0\le x\le1,\ 0\le y\le1\}$。问如果想要让区域$[0,1]\times[0,1]$粘合成一个环面应该怎样定义划分、映射和等价关系？三者中是否定义出其中一个便可得到其它？

映射　$$f(x,y)=\begin{cases}(x,y) & x\in(0,1)\ \ y\in(0,1)\\ (0,y) & x=0\ \text{or}\ 1\ \ y\in(0,1)\\ (x,0) & y=0\ \text{or}\ 1\ \ x\in(0,1)\\ (0,0) & x=0\ \text{or}\ 1\ \ y=0\ \text{or}\ 1\end{cases}$$



划分？　思考题

等价关系？

2. 高维粘合　~~黑洞~~ 虫洞（参考电影星际穿越）无敌之人

时空穿越 弯曲，时空坍缩（自己找资料 我也不懂）

3. Klein 瓶（变成四维图形）

将OC与AB同向粘合，OA与CB反向粘合