

第二次习题课大纲

1. 20分钟回顾上课内容

上课内容: ① 映射复合, 单射, 双射, 满射

② 集合的势, 基数

③ 等价关系, 同余关系

④ 等价类, 集合的划分

2. 40分钟讲作业题

3. 拓展知识

简述选择公理和集合范畴

选择公理是集合论的公理之一, 日后我们研究数学均要在承认选择公理的情况下进行, 也即 ZFC 公理体系下谈数学! 在历史的发展中, 选择公理有很多等价形式, 有时候根本一眼看不出这个和选择公理在 ZF 系统下互相蕴含. 最经典的当然是 Zorn 公理与良序原理, 再就是基数比较公理以及乘积在集合意义下存在, 满射存在右逆...

为了这节课的完备和自恰, 我们这里讲的选择公理均是指: 满射在集合意义下存在右逆. 但从 (5) (6) 开始就已经在 ZF 系统下不一定成立了.

在这里先强调一下, 上次最后那道思考题的前 (4) 问均在 ZF 系统下仍成立, 但在 ZFC 系统下考虑问题.

所以为了方便, 以后做题均承认选择公理, 也就是在 ZFC 系统下考虑问题.

这一节我们把重点放在集合范畴上. 何为范畴? 这是初学者面对 Category 经常要问的问题, 而这事实上范畴有什么用更让人觉得有意思.

为了让大部分人能领会 Category 的意义, 我们只讲最简单的集合范畴。

~~集合~~ 范畴本身很简单, 包含两个东西, 一个是对象, 一个是对象之间的态射, 然后态射满足结合公理与单位公理。
~~其实~~ 而今天要讲的集合范畴, 其对象即为我们熟知的集合, 而对象之间的态射即为集合之间的映射。

那么所谓的结合公理与单位公理是什么呢?

(associativity axiom): $\forall X, Y, Z$ 为范畴 $\mathcal{C}$ 的三个对象, 存在这么一个复合映射

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \quad (f, g) \longmapsto g \circ f$$

满足结合律 $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) \quad \forall X, Y, Z, W \in \text{Ob}(\mathcal{C}), f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z), h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W)$

(unit axiom): $\forall X$ 为范畴 $\mathcal{C}$ 的对象, 存在恒同态射 $\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$

使得 $\text{id}_X \circ f = f \quad g \circ \text{id}_X = g$ 成立

$\forall Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$

很明显在集合 ~~范畴~~ 下这两个公理均成立 (上课映射的集合这一节讲过)

所以我们可以把集合范畴 Set 当成一个集合范畴。

范畴里面对于态射很自然提出单射, 满射的概念, 类似集合中的单射, 满射。

遗憾的是有时候你不知道单, 满是怎么描述的 (这种情况发生在那些无法从对象概念的花哨中)

也有时候你会发现, 满射条件太强了, 对于我们研究结构提供的帮助太小

(Example: $\mathbb{Q} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ 若满足 $f(ab) = f(a)f(b), f(a)+f(b) = f(a+b)$)

那么 f 完全由 $\mathbb{Z}$ 上的取值决定。

pf: 相当于证明 f 在 $\mathbb{Z}$ 上取值由 $f(1)$ 决定, f 在 $\mathbb{Q}$ 上也恒为 0 映射。

$n f(\frac{1}{n}) = f(1) = 0$ 故 $f(\frac{1}{n}) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ 从而 $f \equiv 0$

由此我们引入了 isomorphism 与 epimorphism 的概念。

Def: $f \in \text{Hom}_C(X, Y)$

f is monomorphism $\iff \forall g_1, g_2 \in \text{Hom}_C(W, X)$ 若 $f \circ g_1 = f \circ g_2$ 则 $g_1 = g_2$ (也称^左可消定律)

f is epimorphism $\iff \forall g_1, g_2 \in \text{Hom}_C(Y, Z)$ 若 $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ 则 $g_1 = g_2$ (也称右可消定律)

? 思考: 在集合范畴中 f monomorphism 是否和 f 单射是一回事

epimorphism 满射

当且 双射在一般范畴中也无法说明两个对象真的是是一样的, 比如 R 和 C 在集合范畴中确实存在双射 (思考为什么? 如何构造)

但是 R 和 C 给人的感觉就不一样 (换句话讲, 你无法在集合范畴中区分这2个对象, 为此我们引入了拓扑空间, 群, 环, 域等范畴... 而对于这些范畴, 双射既然不能说明是一样的, 那需要什么来说明呢?

这就是 isomorphism 同构!

Def: $f \in \text{Hom}_C(X, Y)$

f is isomorphism $\iff \exists g \in \text{Hom}_C(Y, X)$ s.t. $f \circ g = \text{id}_Y, g \circ f = \text{id}_X$

(上课也说过, 在集合范畴里, isomorphism 和双射是一回事!)

这时候我们一般称 X 和 Y 两个对象等价, 在集合范畴中即为上课所谓的等势.

思考: f 是 isomorphism 与 f 是 monomorphism + epimorphism 能否互推? (集合范畴下当然可以, 也就是双射 = 单射 + 双射)

在集合范式中，对于族 $\{A_i\}_{i \in I}$ 有四个对象对我们很有帮助。

$$\prod_{i \in I} A_i \quad \text{乘积 (product)} \quad \coprod_{i \in I} A_i \quad \text{不交并 (coproduct)} \quad \bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{并 (union)} \quad \bigcap_{i \in I} A_i \quad \text{交集 (intersection)}$$

其分别对应一般范式中的一些概念：
乘积、余乘积、余并、并

为什么这四个对象很有意义，最重要原因是它们的泛性质！

在讲泛性质之前，我们先看几个简单的例子：

$$1. \quad A_1 = \{1, 2, 3, 4\} \quad A_2 = \{1, 2, 3\}, \quad A_3 = \{1, 2\}, \quad A_4 = \{1\}$$

$$\prod_{i=1}^4 A_i = \{(x, y, z, w) \mid x \in A_1, y \in A_2, z \in A_3, w \in A_4\} \quad \text{一共 } 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ 个元素}$$

$$\coprod_{i=1}^4 A_i = \{(a_i, i) \mid a_i \in A_i\} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (1, 3), (2, 3), (4, 4)\} \quad \text{一共 } 4+3+2+1=10 \text{ 个元素}$$

$$\bigcup_{i=1}^4 A_i = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{一共 4 个元素}$$

$$\bigcap_{i=1}^4 A_i = \{1\} \quad \text{1 个元素}$$

$$2. \quad A_1 = A_2 = \mathbb{N}$$

$$\prod_{i=1}^2 A_i = \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}\}$$

$$\coprod_{i=1}^2 A_i = \mathbb{N} \sqcup \mathbb{N} = \{(x, 1) \mid x \in \mathbb{N}\} \cup \{(x, 2) \mid x \in \mathbb{N}\}$$

$$\bigcup_{i=1}^2 A_i = \mathbb{N}$$

对第一个例子.

我们假设 $f_i: X \rightarrow A_i$ 映射 $i=1,2,3,4$ X 为某个集合

记 $l_j = \prod_{i=1}^4 A_i \rightarrow A_j$ 投影 ~~$l_j = \prod_{i=1}^4 A_i \rightarrow A$~~

思考: 我们能否构造 $f: X \rightarrow \prod_{i=1}^4 A_i$ 使得 $f_i = l_i \circ f$, 是否唯一?

假设 $g_i: A_i \rightarrow X$ 映射 $i=1,2,3,4$ X 为某个集合

记 $l_j: A_j \rightarrow \prod_{i=1}^4 A_i$ $a_j \mapsto (a_j, j)$

思考: 我们能否构造 $g: \prod_{i=1}^4 A_i \rightarrow X$ 使得 $g_i = g \circ l_i$, 是否唯一?

~~我们假设 $h: A_4 \rightarrow A$~~

上面这说的便是 product, coproduct 的泛性质 (universal property)

给定集族 $\{A_i\}_{i \in I}$, $\prod_{i \in I} A_i$ 满足

$\forall f_i: X \rightarrow A_i$ X 为某个集合 记 $l_i: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_i$ 投影 $\forall j \in I$

那么存在唯一的映射 $f: X \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$ 使得 $f_i = l_i \circ f$

思考: 仿照 $\prod_{i \in I} A_i$ 的泛性质 写下 $\coprod_{i \in I} A_i$ 的泛性质

为了更进一步的描述 colimit 与 limit 的泛性质, 我们再看几个例子:

3. $A_n = [0, \frac{1}{n}]$ $n \in \mathbb{N}^+$ 以 $f_{nm}: A_n \rightarrow A_m$ $\forall m \leq n$, 显然 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} A_n = \{0\}$ 以及有平凡的映射 $l_n: \bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} A_n \rightarrow A_n$

假设存在 $h_n: X \rightarrow A_n$ 映射 $n \in \mathbb{N}^+$ X 为某个集合 满足 $f_{nm} \circ h_n = h_m$ $\forall n, m \in \mathbb{N}^+$

思考: 我们能否构造 $h: X \rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} A_n$ 使得 $l_n \circ h = h_n$, 是否唯一?

4. $A_n = [0, 1 - \frac{1}{n}) \quad n \in \mathbb{N}^+ \quad \text{以及 } f_n: A_n \rightarrow A_m \quad \forall n \leq m$

显然 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} A_n = [0, 1)$ 以及映射 $\tau_n: A_n \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} A_n$ 嵌入

假设存在 $\omega_n: A_n \rightarrow X$ 映射 $n \in \mathbb{N}^+$, X 为某个集合满足 $\omega_m \circ f_m = \omega_n \quad \forall n, m \in \mathbb{N}^+$

思考: 我们能否构造 $\omega: \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} A_n \rightarrow X$ 使得 $\omega \circ \tau_n = \omega_n$, 是否唯一?

——
不难发现讲 colimit 与 limit 时, 我们不仅需要 $\{A_{ij}\}$ 还需要 $f_{ij}: A_i \rightarrow A_j$ 以及指标集 I 上的一个序
这在我们数学中称为一个系统, colimit 对应 direct system, limit 对应 inverse system
有兴趣的同学可以参阅 wiki 或者是各种代数教材或者范畴论 CTM 4

思考: 通过查阅资料写出 colimit, limit 的性质.