

本周较特殊，周五周日两次习题课，故计划周五回顾上课内容+习题讲解，周日拓展视野)

周五内容：

1. 上课内容

- ① 最大公因数，最小公倍数 (不相交)
Thm 1. 任意置换均可以写成循环乘积
- ② 置换
Thm 2. 任意循环均可以写成对换乘积
Thm 3. 对换乘积表达式中 对换个数的奇偶性不发生改变
- ③ 辗转相除法

2. 习题讲解：(在讲习题之前讲一下什么叫做子空间)

3. 拓展视野

拓扑空间范畴

主要内容 ① 拓扑定义，开闭集

② 基，子基，邻域，内部，闭包

③ 可数性和序列极限

④ 子空间拓扑，

⑤ 连续映射，同胚

⑥ 乘积拓扑，~~商拓扑~~，商拓扑

⑦ 紧性、

习题课中补充内容

Prop 1. X, Y 无限集 Y 集合

如果 $|X| > |Y|$ 则 $|X \sqcup Y| = |X|$

Prop 2: X 无限集

那么 $|X \times X| = |X|$

Pf: 事实上 Prop 1 只需证明 $|X \sqcup X| = |X|$ 即可

定义 偏序集 $(S, \leq)$

$S = \{(A, f) \mid A \subseteq X, f: A \rightarrow A \sqcup A \text{ 双射}\}$

$(A, f) \leq (B, g) \iff A \subseteq B, g|_A = f$

不难验证 $(S, \leq)$ 任意链均有上界, 可由 Zorn 引理存在极大元 (H, h)

下面证明 $X - H$ 为有限集即可 因为 ~~$|X - H|$~~ ~~(这是因为 X 为可数子集 A 且 A 与~~

$(X - H) \cup H = |H|$ (这是因为 H 无限集 存在可数子集 A 且 A 与 $A \cup (X - H)$ 之间双射 (平射))

那么 $H - A$ 与 $(X - H) \cup H - A \cup (X - H)$ 之间双射 (恒同)

并起来得到 $(X - H) \cup H$ 与 H 双射

如果 $X - H$ 不为有限集 那么存在 $X - H$ 的一个可数子集 A 与 N 等势

而 A 与 $A \sqcup A$ 之间双射之前证过 (利用 $N \rightarrow N \sqcup N$ 分奇偶映)

故与 $H \xrightarrow{h} H \sqcup H$ 拼成 $A \sqcup H \xrightarrow{\tilde{h}} (A \cup H) \sqcup (A \cup H) = (A \sqcup A) \cup (H \sqcup H)$ 的双射

那么 $(H, h) \leq (A \cup H, \tilde{h})$ (但是不同与极大元矛盾)

故 $X - H$ 为有限集 从而 $|X| = |H|$ 从而 $|X| = |X \sqcup X|$

定义偏序集 $(T, \leq)$

$$T = \{(A, f) \mid A \subseteq X, f: A \rightarrow A \times A \text{ 双射}\}$$

$$(A, f) \leq (B, g) \iff A \subseteq B, g|_A = f$$

不难验证 $(T, \leq)$ 任意链有上界 故由 Zorn 引理 存在极大元 (H, h)

下面证明 $|X| = |H|$

若 $|X| > |H|$ 可知 $|X - H| = |X|$ (由 Prop 1) $> |H|$

从而存在 $S: H \rightarrow X - H$ 单射 记 $S(H) = \tilde{H}$

因为 $|\tilde{H}| = |H|$ 故存在 $\tilde{H} \rightarrow \tilde{H} \times \tilde{H}$ 双射

$\tilde{H} \rightarrow H \times H$ 双射

$\tilde{H} \rightarrow \tilde{H} \times H$ 双射

再由 Prop 1 $\tilde{H} \rightarrow \tilde{H} \times \tilde{H} \cup H \times \tilde{H} \cup \tilde{H} \times H$ 双射

与 $H \rightarrow H \times H$ 双射 拼接 $\tilde{h}$

$H \cup \tilde{H} \rightarrow (H \cup \tilde{H}) \times (H \cup \tilde{H})$ 双射

那么 $(H, h) \leq (H \cup \tilde{H}, \tilde{h})$ 与极大元矛盾

故 $|X| = |H|$ 从而 $|X \times X| = |X|$

我们以区间 $[0,1]$ 与 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 为动机来研究拓扑空间
 希望大家学完之后能给出这两个不同胚的理由 (或者说为什么这个双射不是同胚)。

① 拓扑定义, 基, 子基

因为我们在几何上判断两个集合是否等同已经无法从是否存在双射来判断了
 所以我们需要研究这两个集合还拥有什么样的结构才能给出几何上等同的严格刻画。
 这便是拓扑结构!

def 定义: 集合 X 上的一个拓扑是指 X 的一个满足下列条件的子集族 $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$.

- (1) $\emptyset, X \in \tau$
- (2) 任意 $U, V \in \tau, U \cap V \in \tau$
- (3) 任意 τ 的子族 $\{U_i\}_{i \in I}, \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$

序对 (X, τ) 称为拓扑空间, τ 中元素称为 (X, τ) 的开集
 但是事实上, 我们一般不可能把一个拓扑空间的开集完整写下来, 所以我们要找一种既能完整的反映拓扑, 又比较轻松的表达方法。
 这便是拓扑空间的基和子基的来由。

def 定义 $B \subseteq \tau$ 称为 (X, τ) 的基, 若 $\forall U \in \tau \exists B$ 中子族 $\{U_i\}_{i \in I}$ s.t. $\bigcup_{i \in I} U_i = U$
 B 为 τ 中一族集合称为 (X, τ) 的子基 若开集族 $\{U_1 \cap U_2 \dots \cap U_n \mid U_i \in B, n \geq 1\}$ 是 (X, τ) 的一个基。

例子: 以 $\mathbb{R}$ 的标准拓扑为例

$\mathbb{R}$ 中开集就是那些满足以下性质的子集 U 为开集 $\Leftrightarrow \forall x \in U \exists a, b$ s.t. $x \in (a, b) \subseteq U$
 事实上当 x 取遍 U 之后得到一串 (a_x, b_x) 满足 $x \in (a_x, b_x) \subseteq U$
 故 $\bigcup_{x \in U} (a_x, b_x) = U$ 所以 $\mathbb{R}$ 中开集即为一族开区间的并

因此 $\{(a, b) \mid a < b \in \mathbb{R}\}$ 就是 $\mathbb{R}$ 的标准拓扑的一个基 甚至端点可取为 $\mathbb{Q}$ 中的数 $\{(a, b) \mid a < b \in \mathbb{Q}\}$
 注意到 $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, +\infty)$ 所以 $\{(-\infty, a), (a, +\infty) \mid a \in \mathbb{Q}\}$ 是其另一组子基

从R的标准拓扑也得出来

我们还有一种刻画拓扑的方式，那就是通过邻域

事实证明，通过邻域来研究集合的拓扑结构通常会更有效，因为它反映了一种局部信息，而大多数拓扑结构，其局部信息比整体结构要好得多，而拓扑这个结构它有一个非常好的性质，那就是局部信息能完全反映整体结构。

为了更严格的说明上面这句话，我们引入邻域系的公理。

Def 定义：(X, T) 为拓扑空间
其一个子集 $\cup$ 称为 X 中一点 x 的邻域 若存在包含 x 的开集 V 使得 $x \in V \subseteq U$

记 x 的所有邻域为 $N(x)$ 称为 x 的邻域系
记 x 的所有邻域为 $N(x)$ 称为 x 的邻域系

然后我们反过来，若给我们一簇子集族 $\{N(x) | x \in X\}$ ， $N(x)$ 为 x 的子集族

如何能成为一个拓扑的邻域系呢？

X 上的

定理表明需要上述这一簇子集族 $\{N(x) | x \in X\}$ 满足以下条件，就能在 X 上找一个拓扑（且是唯一的）使其成为邻域系

(N1) $\forall x \in X, X \in N(x)$

(N2) $\forall U \in N(x), x \in U \Rightarrow V \in N(x)$

(N3) 如果 $U \in N(x), U \subseteq V \Rightarrow V \in N(x)$

(N4) 如果 $U, V \in N(x)$ 则 $U \cap V \in N(x)$ 使得 $V \subseteq U$ 并且 $\forall y \in V, U \in N(y)$

(N5) $\forall U \in N(x) \exists V \in N(x)$ 我们不好描述，但是我们可以借助邻域基来描述

再看 R 的标准拓扑，虽然 $\forall x \in R$ 它的 $N(x)$ 我们不好描述，但是我们可以借助邻域基。

邻域基 $\{(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}) | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 是 a 的一个邻域基。

为了在~~上~~引入极限的概念，我们需要类似于 $\mathbb{R}$ 上引入极限时的方法
拓扑空间

Def 定义：拓扑空间 (X, τ) 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛到 x

若任给 x 的邻域 U 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall n \geq N$ 均有 $x_n \in U$

定义很简单，但是有几个问题需要考虑

- ① 给我一个序列 $\{x_n\}$ 何时收敛？是否唯一？
- ② 是不是对于 X 中所有点 x 均有 $\{x_n\}$ 使得其为 $\{x_n\}$ 的一个收敛点？
- ③ 能否通过 X 中的序列收敛 完全刻画 X 的拓扑结构？如果不行，如何解决？

这三个问题在 $\mathbb{R}$ 的标准拓扑下得到完美解答

- ① 就是微积分中柯西判别法做的事，而且若收敛，那一定有一个子列收敛到某一点。
- ② 平面的 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x + \frac{1}{n}) = x$
- ③ 完全可以，因为 $\mathbb{R}$ 中的闭集 U 就是说里面任意一点均可找到一个序列收敛到它

而对于一般的拓扑空间 (X, τ)

- ① 问题没有一般性判别法，不同拓扑不同判别法，但是有一个必要条件，这和闭包运算是相关
 $A \subseteq X$ 若 $\{x_n\}$ 收敛到 x 且 $x_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N}$ 那么 $x \in \bar{A}$ (A 的闭包)
- ② 问题和拓扑空间的可数性是息息相关，有一个充分条件。

若 X 第一可数， $x \in \bar{A}$ ($A \subseteq X$ 子集) 那么存在 $\{x_n\}$ 为 A 中序列收敛到 x (特别地取 $A = X$ 就是我们想要的结果)
(第一可数即是指 $\forall x \in X$ 存在可数邻域基)

- ③ 问题从②问题可以找到解答，充分条件即是 X 是一个第一可数空间

但是对于非第一可数空间 (比如 $\mathbb{R}$ 上的右拓扑)，我们就需要新的收敛方式来刻画拓扑结构
即便是网的收敛。这里不再展开。

有时候我们往往只研究一个集合的子集的拓扑结构，但如果大空间的拓扑结构很清楚，如何良好的定义子集上的拓扑结构，这便是子空间拓扑的来由。

Def: 定义 记 (X, τ) 为拓扑空间， $Y \subseteq X$ 子集

Y 上由 X 上拓扑 τ 诱导的子空间拓扑即为 $\{U \cap Y \mid U \in \tau\}$

例子：比如 $\mathbb{R}$ 的标准拓扑限制在子集 $\mathbb{N}$ 上为离散拓扑（所有点均为开集）

但是限制在 $\mathbb{Q}$ 上就不是离散拓扑（思考为什么？）

而子空间拓扑最有趣的地方在于研究它是否继承大空间的某种性质，这里就不展开了。

有了以上准备，我们就可以谈什么叫做同胚映射，且

首先两个拓扑空间之间的映射不能只是看成集合之间的映射，肯定要把这两个拓扑空间的拓扑结构呈现出来

这就有了连续映射的概念，熟知的 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 连续函数就是 $\mathbb{R}$ 标准拓扑之间的连续映射

Def: 定义 设 (X, τ) , (Y, σ) 为拓扑空间，称映射 $f: X \rightarrow Y$ 为连续映射。

若任给 Y 中开集 U , $f^{-1}(U)$ 为 X 中开集。

但此种定义的弊端也很大，要验证所有开集，故很自然想到用基，子基，邻域系的方式来描述连续映射。

等价定义 ① 若任给 Y 中开集 U , $f^{-1}(U)$ 为 X 中开集（ B 为 Y 的基或者子基）

等价定义 ② f 为连续映射 $\Leftrightarrow f$ 逐点连续

而 f 在 $x \in X$ 处连续意思是 $\forall f(x)$ 的邻域 V , 存在 x 的邻域 U , 使得 $f(U) \subseteq V$

而对于第一句数空间（比如 $\mathbb{R}$ 上标准拓扑）逐点连续可以用序列收敛来描述

即 f 在 $x \in X$ 处连续 $\Leftrightarrow \forall \{x_n\}$ 收敛到 x 那么 $\{f(x_n)\}$ 收敛到 $f(x)$

~~而~~

而同胚映射和双射类似，若 $f: X \rightarrow Y$ 连续映射，存在 $g: Y \rightarrow X$ 连续映射使得 $g \circ f = \text{id}_X$, $f \circ g = \text{id}_Y$

那么称 f 为同胚映射， g 称为 f 的逆。这时称 X 与 Y 同胚。

而拓扑学两个重要的课题即是研究拓扑不变量与连续不变量

即在同胚映射下, 什么~~拓扑~~性质能够保持? 这些性质我们称为拓扑性质, 拓扑不变量

连续映射下, 什么性质能够保持? 这些性质我们称为连续不变量.

所以我们证明 X 和 Y 两个拓扑空间不同胚, 只需找一个拓扑不变量 X 和 Y 的不同即可.

但我们经常无法直接构造同胚映射的逆映射. 所以要引入开映射, 闭映射来直接判断连续映射是否是同胚映射.

Def 定义: $f: X \rightarrow Y$ 映射称为开映射

若 $V \subset X$ 为 X 的开集, $f(V)$ 为 Y 的开集 (闭映射类似)

Thm: X, Y 为拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$ 为连续映射

那么以下条件等价

- ① f 是同胚映射
- ② f 是双射, f 的集合逆映射 $g: Y \rightarrow X$ 连续
- ③ f 是双射且为开映射
- ④ f 是双射且为闭映射

思考题: 任意 $[0, 1]$ 区间上的连续函数均为闭映射 (微积分中重要的一个定理)

但在这里, 我们仍无法证明 $[0, 1]$ 和 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 不同胚, $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 与 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 同胚

因为我们并不知道 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 的拓扑与 $\mathbb{R}$ 的拓扑有什么关系, $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 的拓扑与 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 的拓扑有什么关系

所以接下来我们来讲两种最重要的构造拓扑的方式 (商拓扑与乘积拓扑), 并以此描述 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 的拓扑结构

乘积拓扑

(X, τ) , (Y, σ) 为拓扑空间, 最自然的对于 $X \times Y$ 上的拓扑构造方法当然是 $\{U \times V \mid U \in \tau, V \in \sigma\}$ 但是这并不是一个拓扑, 因为 $(U_1 \times V_1) \cup (U_2 \times V_2)$ 并不一定能写成 $U \times V$ 这样子

例子: $\mathbb{R}^2$ 中, $([0,1] \times (1,2)) \cup ((1,2) \times (0,1))$ 就无法写成 $U \times V$ 这样子 U, V 为 $\mathbb{R}$ 的标准拓扑中元素

但是可以以这组元素为基生成 $X \times Y$ 上的拓扑, 这便是乘积拓扑

(思考, 若对于拓扑空间族 $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ 如何定义 $\prod_{i \in I} X_i$ 上的拓扑结构)

乘积拓扑有一个非常好的性质 (又被称为乘积拓扑的泛性质), 以此判断 $f: Z \rightarrow X \times Y$ 是否连续十分有效

prop 3. 记 $p_X: X \times Y \rightarrow X$, $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$ 为投影映射 (思考 p_X, p_Y 为什么连续?)

那么 $f: Z \rightarrow X \times Y$ 连续 $\iff \text{Proj } f: Z \rightarrow X, \text{Proj } f: Z \rightarrow Y$ 连续

商拓扑

设 (X, τ) 为拓扑空间, $\sim$ 为 X 上等价关系, 如何在商集 $X/\sim$ 上赋予较好的拓扑是我们接下来要做的

本质上我们要保证 $p: X \rightarrow X/\sim$ 商映射是连续映射

那么 $U \subseteq X/\sim$ 为开集 ~~就是~~ $p^{-1}(U)$ 为 X 的开集的那些 U 就非常自然 (思考为什么是一个拓扑?)

即 $\{U \subseteq X/\sim \mid p^{-1}(U) \text{ 为 } X \text{ 中开集}\}$ 可成为 $X/\sim$ 上的拓扑 (思考为什么是一个拓扑?)

(连续映射)
or (连续双射)

而商拓扑有一个非常好的性质, 以此来判断商空间与其他拓扑空间之间的连续映射是否为同胚十分有效

为此我们需要商映射这种概念来表述

Def 定义: 满映射 $f: X \rightarrow Y$ 称为商映射 若任给 $V \subseteq Y$

V 为开集 $\iff f^{-1}(V)$ 为 X 中开集

(例子 $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 即为商映射, 一般地 $p: X \rightarrow X/\sim$ 也为商映射, 这也是叫商映射的缘故!)

之前作业证明过

$f: X \rightarrow Y$ 集合之间的映射 $\sim$ 为 X 上等价关系
为了找到 $X/\sim \rightarrow Y$ 的映射 $\tilde{f}$ 使得 $f = \tilde{f} \circ p$

我们需要 $X_1 \sim X_2 \Rightarrow f(X_1) = f(X_2)$

若还需要 f 为单射 那么 $X_1 \sim X_2 \Leftrightarrow f(X_1) = f(X_2)$

所以如果事先有 $X/\sim \rightarrow Y$ 的连续单射 $\tilde{f}$ 那么

f 就满足 $X_1 \sim X_2 \Leftrightarrow f(X_1) = f(X_2)$

并且 f 为连续映射

而我们想问何时 $\tilde{f}$ 为同胚映射? 答案即是 f 为商映射!

所以证明: $R/\mathbb{Z} \rightarrow S^1$ 是同胚 只需说明

f 是商映射!

思考: $f: R/\mathbb{Z} \rightarrow S^1$ 为什么是同胚?

$t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ 为什么是商映射?

也就是 $f: R \rightarrow S^1$

$t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

接下来为了说明 $[0,1]$ 与 $R/\mathbb{Z}$ 不同胚, 我们需要引入一个重要的拓扑不变量: 紧性

微积分中我们学过了几个和紧性相关的定理: ① 闭区间上连续函数一定有最大值和最小值

② $[a,b]$ 的任意由开区间构成的覆盖一定有有限开覆盖

① 说明了紧集在 R 中和有界闭集等同

② 说明了 $[a,b]$ 是紧集.

Def 定义: (X, τ) 称为紧空间 若 X 的任意开覆盖都有有限子覆盖.

即 $X = \bigcup U_i$ U_i 为 X 中开集

那么 $X = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_n} U_i$ ~~($\exists n \in \mathbb{N}^+$)~~
~~使得~~ $X = \bigcup_{t=1}^n U_t$ ~~($\exists i_1, \dots, i_n \in \mathbb{Z}_n$)~~

那么 $\exists n \in \mathbb{N}^+$, $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{Z}$ 使得 $X = \bigcup_{t=1}^n U_{i_t}$

思考: 为什么^和紧空间同胚的子空间仍为紧空间

例子: ① 离散集为紧空间 当且仅当其为有限点集

② $[0, 1)$ 不是紧空间 因为 $[0, 1) = \bigcup_{n=2}^{\infty} [0, 1 - \frac{1}{n})$ 但是不存在有限子覆盖

③ S^1 是紧空间 (这是 $\mathbb{R}^n$ 中紧子集 等价于 有界闭集的直接推论)

④ T^2 是紧空间 (这是紧空间 X, Y 能推出 $X \times Y$ 也是紧空间的直接推论)

(查阅资料说明一族紧空间的乘积空间也是紧空间 (Tychonoff 乘积定理))

至此我们可以很轻松的证明

$[0, 1) \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 不同胚

$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1$ 同胚

$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 同胚

$S^1 \times S^1 \rightarrow T^2$ 同胚