可数集

Def：称集合A为可数的，如果存在双射 $\varphi: A \to \mathbb{N}$（无穷集）

称集合A为至多可数的，如果存在单射 $\varphi: A \to \mathbb{N}$

例1：整数集是可数的。构造映射 $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ 满足 $\varphi(n)=\begin{cases} 2n & (n\in\mathbb{N}) \\ -(2n+1) & (n\in\mathbb{Z}^-) \end{cases}$ 求证双射？

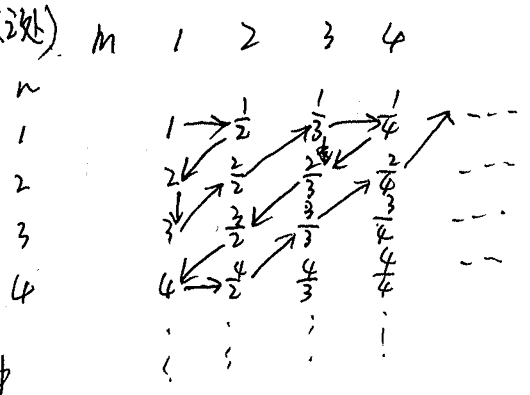
思考题

例2：有理数集是可数的。（只需找到有理数集到整数集之间的双射即可）

对于分数 $\frac{n}{m}$（与二重数学归纳法(m,n)是良序有联系 由同去之处）

首先证明命题：可数集的任何无限子集都是可数的。

对$\forall$可数集S，则S到$\mathbb{N}$有一个双射，则该可数集的无限子集到$\mathbb{N}$的无限子集是嵌入在S到$\mathbb{N}$的一个双射。故只需证$\mathbb{N}$的无限子集也是可数集。设$M\subseteq\mathbb{N}$，由良序定理：任何自然数的非空集合一定有最小元，则M中有最小元设为m_0。同理 $M\setminus\{m_0\}$中最小元设为m_1，$M\setminus\{m_0,m_1\}$中最小元为m_2。以此类推，得到无穷序列。构造映射$\varphi: M\to\mathbb{N}$：$m_i\mapsto i$ $(i=0,1,\cdots)$。则是一一映射。即M是可数集，命题得证。



将正有理数按照箭头方向排序，则得到$\mathbb{Q}^+$上的全序。设$\mathbb{Q}^+=\{q_1,q_2,q_3,\cdots\}$是按照序从小到大排列的。定义映射 $\psi: \mathbb{Q}^+\to\mathbb{N}\setminus\{0\}$：$q_i\mapsto i$。$(i=1,2,\cdots)$。并且$\psi(0)=0$，则$\psi$是$\mathbb{Q}^+\cup\{0\}$到$\mathbb{N}$的双射。补充$\psi$的定义到$\mathbb{Z}^-$，即 $\psi: \mathbb{Q}\to\mathbb{Z}$：$\begin{cases} q_i\mapsto i \\ -q_i\mapsto -i \\ 0\mapsto 0 \end{cases}$ 则ψ是$\mathbb{Q}$到$\mathbb{Z}$的双射。$\therefore$ $\mathbb{Q}$可数。

例3：实数集不可数。

反证法，假设$\mathbb{R}$可数，$\exists$双射$\varphi: \mathbb{N}\to\mathbb{R}$，则$\mathbb{R}=\{\varphi(0),\varphi(1),\varphi(2),\dots\}$ 不妨设恒有$\varphi(k)<\varphi(k+1)$ 对$\forall\varphi(k),\varphi(k+1)\in\mathbb{R}$

$\because \varphi(k)\neq\varphi(k+1)$ 定义 $r_0=\frac{\varphi(k)+\varphi(k+1)}{2}$，则$\varphi(k)<r_0<\varphi(k+1)$，且有 $\varphi(0)<\varphi(1)<\cdots<\varphi(k)<r_0<\varphi(k+1)<\varphi(k+2)\cdots$

则r_0不在$\varphi(\mathbb{N})$中，与φ是双射矛盾，故$\mathbb{R}$不可数。

1. 证明集合 $T=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid a-b\in\mathbb{Z}\}$ 是实数集 $\mathbb{R}$ 上的等价关系，且几何上 $\mathbb{R}$ 关于这个等价关系的商集可以和圆周等同起来。

证明：1) $\forall a\in\mathbb{R}$ $\quad 0=a-a\in\mathbb{Z}$ （自反性）

2) $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$ $\quad a-b\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow b-a\in\mathbb{Z}$ （对称性）

3) $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,(b,c)\in\mathbb{R}^2$，若 $a-b\in\mathbb{Z}$，$b-c\in\mathbb{Z}$，则 $a-c=(a-b)+(b-c)\in\mathbb{Z}$ （传递性）

故T是一个等价关系。~~$\mathbb{R}/\sim=\{\bar{x}$~~ $S=\{\bar{x}\in[0,1) \mid \forall a\in\mathbb{R}.\ a-\lfloor a\rfloor=x\}$，验证~~$\mathbb{R}/\sim$是~~S是 $\mathbb{R}$ 关于等价关系的商集：（$\lfloor a\rfloor$ 表示对实数a取整，floor函数）

1) $\forall a,b\in\bar{x}$，则 $a-\lfloor a\rfloor=x$ $\quad b-\lfloor b\rfloor=x$

$\therefore a-b=x+\lfloor a\rfloor-x-\lfloor b\rfloor=\lfloor a\rfloor-\lfloor b\rfloor\in\mathbb{Z}$ $\quad\therefore a\sim b$

2) 若 $x\neq y$，假设 $a\in\bar{x}$ 且 $a\in\bar{y}$，则 $a-\lfloor a\rfloor=x$ 且 $a-\lfloor a\rfloor=y$ 与 $x\neq y$ 矛盾，故 $\bar{x}\cap\bar{y}=\emptyset$

3) 对 $\forall a\in\mathbb{R}$，显然 $\exists x\in[0,1)$，使得 $a=x+\lfloor a\rfloor$ $\quad\therefore a-\lfloor a\rfloor=x$

故S是商集 $\mathbb{R}/\sim$。

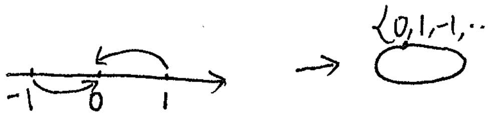
定义映射 $\varphi:\mathbb{R}\to S: a\mapsto\overline{a-\lfloor a\rfloor}$，验证 φ 是良定义的。

1) $\because \lfloor a\rfloor$ — floor函数是映射 $\therefore \forall a\in\mathbb{R}$，唯一对应一个 $\lfloor a\rfloor$，故唯一对应一个 $\bar{x}\in S$，s.t. $a-\lfloor a\rfloor=x\in[0,1)$ $\quad\therefore \varphi(a)=\overline{a-\lfloor a\rfloor}$ 是唯一的

2) $\forall a\in\mathbb{R}$，$\exists x\in[0,1)$，使得 $a-\lfloor a\rfloor=x$，$\therefore\varphi(a)$ 存在 $\varphi(a)=\bar{x}$。

故 φ 是映射。又 $\because$ 对 $\forall\bar{x}\in[0,1)$，$\exists x\in\mathbb{R}$，使得 $x-\lfloor x\rfloor=x$ 是 $\bar{x}$ 的原像 $\therefore\varphi$ 是满射 ~~∴φ是自然映射~~ $\therefore\varphi$ 是 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}/\sim$ 的自然映射。

粘合：



圆周。

2. 设 $\mathbb{R}^2/\sim$ 是图8中给出的商集，l是与OX轴相交的任意直线，试给出 $\mathbb{R}^2/\sim$ 的元素与l的点之间的一一对应。

令l是映射 $f(x)=ax+b(=y)$ 的图象（其中 $\because$ l与OX轴相交 $\therefore a\neq0$）

证明"~"是等价关系：1) $(x,y)\sim(x,y)$ 显然（$\because y=y$）

2) $\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ 若有 $y_1=y_2$，则 $y_2=y_1$ $\therefore (x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)\Rightarrow(x_2,y_2)\sim(x_1,y_1)$

3) $\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)\in\mathbb{R}^2$ 若 $y_1=y_2$，$y_2=y_3$，则 $y_1=y_3$

$\therefore (x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$ 且 $(x_2,y_2)\sim(x_3,y_3)\Rightarrow(x_1,y_1)\sim(x_3,y_3)$

故"~"是等价关系。$\mathbb{R}^2/\sim=\{\overline{(x,y)}\in\mathbb{R}^2 \mid \exists a\in\mathbb{R}\ \text{s.t.}\ y=a\}$ 即 $\mathbb{R}^2/\sim$ 是所有与x轴平行的直线。验证 $\mathbb{R}^2/\sim$ 是商集。1) $\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\overline{(x,y)}$，则 ~~$y_1=y_2=y$~~ $y_1=y$，$y_2=y$ $\therefore y_1=y_2$ $\therefore (x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$

2) 若 $\overline{(x,y)},\overline{(x',y')}\in\mathbb{R}^2/\sim$ 且 $y\neq y'$，对 $\forall$ ~~$x\in\overline{(x,y)}$~~ $(x_1,y_1)\in\overline{(x,y)}$ 有 $y_1=y$ $\therefore y_1\neq y'$

同理 $\forall(x_2,y_2)\in\overline{(x',y')}$ 有 $y_2=y'$ $\therefore y_2\neq y$ $\therefore \overline{(x,y)}\cap\overline{(x',y')}=\emptyset$

3) 对 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$，$\exists\overline{(x,y)}\in\mathbb{R}^2/\sim$，使 $(x,y)\in\overline{(x,y)}$

故 $\mathbb{R}^2/\sim$ 是商集。

定义映射 $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\sim : (x,y) \mapsto \overline{(x,y)}$ 验证 φ 是良定义的

1) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. $\exists \overline{(x,y)} \in \mathbb{R}^2/\sim$. s.t. $\varphi(x,y) = \overline{(x,y)}$

2) 假设 $\varphi(x_0,y_0) = \overline{(x,y)}$ 且 $\varphi(x_0,y_0) \in \overline{(x',y')}$. 则 $y_0 = y$, $y_0 = y'$ $\therefore y = y'$ $\therefore \overline{(x,y)} = \overline{(x',y')}$

$\therefore \varphi(x_0, y_0)$ 是唯一的.

故 φ 是映射. 且 φ 是 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^2/\sim$ 的自然映射

定义映射 $\psi: \mathbb{R}^2/\sim \longrightarrow l: \overline{(x,y)} \mapsto (\frac{y-b}{a}, y)$. 验证 ψ 是良定义的以及双射

1). $\forall \overline{(x,y)} \in \mathbb{R}^2/\sim$. $\exists (\frac{y-b}{a}, y) \in l$. 使 $\psi(\overline{(x,y)})$ ~~是唯一的~~ 的存在.

2) $\forall \overline{(x,y)} \in \mathbb{R}^2/\sim$. 若 $\psi(\overline{(x_1,y_1)}) = (\frac{y_1-b}{a}, y_1)$. $\psi(\overline{(x_2,y_2)}) = (\frac{y_2-b}{a}, y_2)$ 其中 $\overline{(x_1,y_1)} = \overline{(x_2,y_2)} = \overline{(x,y)}$

则 $y_1 = y$. $y_2 = y$ $\therefore \frac{y_1-b}{a} = \frac{y_2-b}{a}$ 且 $y_1 = y_2$. 故 $\overline{(x,y)}$ 的象是唯一的.

3) $\forall (x,y) \in l$. 则有 $x = \frac{y-b}{a}$ ($\because a \neq 0$). 假设 $\psi(\overline{(x_1,y_1)}) = \psi(\overline{(x_2,y_2)}) = (\frac{y-b}{a}, y) = (x,y)$

即 $y_1 = y$, $y_2 = y$. $\therefore y_1 = y_2$ $\therefore \overline{(x_1,y_1)} = \overline{(x_2,y_2)}$. 故 ψ 单.

4) $\forall (x,y) \in l$. 则有 $x = \frac{y-b}{a}$ $\exists \overline{(x,y)} \in \mathbb{R}^2/\sim$. 使得 $\psi(\overline{(x,y)}) = (\frac{y-b}{a}, y) = (x,y)$

$\therefore \psi$ 是满射.

ψ 即 $\mathbb{R}^2/\sim$ 与 l 点之间的一一映射.

3. 令实坐标平面 $\mathbb{R}^2$ 上的两点 $P(x,y) \sim P(x',y')$, 当且仅当 $x'-x \in \mathbb{Z}$ 且 $y-y' \in \mathbb{Z}$. 证明"$\sim$"是等价关系, 且商集可以几何地表示为环面上的点集.

证明: 1) $(x,y) \sim (x,y)$ 显然; ($\because x-x=0=y-y=0 \in \mathbb{Z}$)

2) 若 $(x,y) \sim (x',y')$. 即 $x'-x \in \mathbb{Z}$ 且 $y-y' \in \mathbb{Z}$. 则 $x-x' \in \mathbb{Z}$, 且 $y'-y \in \mathbb{Z}$ 即 $(x',y') \sim (x,y)$

3) 若 $(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2)$, 且 $(x_2,y_2) \sim (x_3,y_3)$. 即 $\begin{cases} x_2-x_1 \in \mathbb{Z} \\ y_1-y_2 \in \mathbb{Z} \\ x_3-x_2 \in \mathbb{Z} \\ y_2-y_3 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3-x_1 = x_3-x_2+(x_2-x_1) \in \mathbb{Z} \\ y_1-y_3 = y_1-y_2+(y_2-y_3) \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\therefore (x_1,y_1) \sim (x_3,y_3)$

"$\sim$"是等价关系得证. 定义划分 $T = \{\overline{(a,b)} \in [0,1) \times [0,1) \mid \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x - \lfloor x \rfloor = a, y - \lfloor y \rfloor = b\}$

验证 T 是商集 $\mathbb{R}^2/\sim$:

1) 若 $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in \overline{(a,b)}$. 即 $x_1 - \lfloor x_1 \rfloor = a$. 且 $y_1 - \lfloor y_1 \rfloor = b$, $x_2 - \lfloor x_2 \rfloor = a$, $y_2 - \lfloor y_2 \rfloor = b$

$\therefore$ $x_2 - x_1 = a + \lfloor x_2 \rfloor - a - \lfloor x_1 \rfloor = \lfloor x_2 \rfloor - \lfloor x_1 \rfloor \in \mathbb{Z}$. $y_1 - y_2 = b + \lfloor y_1 \rfloor - b - \lfloor y_2 \rfloor = \lfloor y_1 \rfloor - \lfloor y_2 \rfloor \in \mathbb{Z}$

$\therefore (x_1,y_1) \sim (x_2,y_2)$

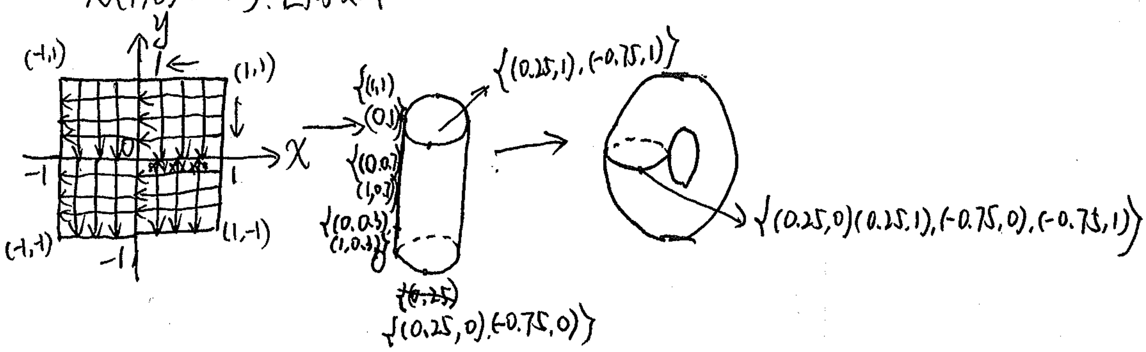
2) 若 $\overline{(a_1,b_1)}, \overline{(a_2,b_2)} \in T$, 且 $\overline{(a_1,b_1)} \neq \overline{(a_2,b_2)}$, $\forall (x,y) \in \overline{(a_1,b_1)}$ 有 $x = \lfloor x \rfloor + a_1$ $y = \lfloor y \rfloor + b_1$

已知 $\overline{(a_2,b_2)} \neq \overline{(a_1,b_1)}$. 即 $a_2 = a_1$ 和 $b_2 = b_1$ 不能同时成立 $\therefore$ $x - \lfloor x \rfloor = a_2$ 和 $y - \lfloor y \rfloor = b_2$ 不能同时成立 $\therefore (x,y) \notin \overline{(a_2,b_2)}$. 同理 $\forall (x,y) \in \overline{(a_2,b_2)}$. $(x,y) \notin \overline{(a_1,b_1)}$ $\therefore \overline{(a_1,b_1)} \cap \overline{(a_2,b_2)} = \emptyset$

3) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$. $\exists\,\overline{(a,b)}\in \overset{T}{\cancel{[0,1)\times[0,1)}}$ 使得 $x-[x]=a$. $y-[y]=b$. 即 $(x,y)\in\overline{(a,b)}$

故 $T=\mathbb{R}^2/\sim$.

粘合: 对于平面上的点集 $[0,1]\times[0,1]$ 有 $(0,b)\sim(1,b)$. (其中 $\forall b\in\mathbb{R}$); $(a,0)\sim(a,1)$. (其中 $\forall a\in\mathbb{R}$), $(0,0)\sim(0,1)\sim(1,0)\sim(1,1)$. 图示如下



为环面(不包含面包圈的内部)

4. 证明2元,3元和4元集分别有2,5和15个不同的商集.

证明: 商集与划分一一对应. 故只需找到集合的划分方式.

2元集 $A=\{a,b\}$ ~~只有一个~~ 划分中只有一个集合: $T=\{A\}$; 划分中有两个集合时: $T=\{\{a\},\{b\}\}$. 2个

3元集 $B=\{a,b,c\}$. 划分中只有一个集合 $T=\{B\}$;

划分中有两个集合 $T=\{\{a\},\{b,c\}\}$ 或 $T=\{\{b\},\{a,c\}\}$ 或 $T=\{\{c\},\{a,b\}\}$.

划分中有三个集合 $T=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$ 5个

4元集 $C=\{a,b,c,d\}$. 划分中只有一个集合时. $T=\{C\}$; 1

划分中有两个集合时. 有 $C_4^1+C_4^2/2$ 种不同的T; 7

划分中有三个集合时. 有 C_4^2 种不同的T; 6

划分中有四个集合时. 有 $T=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}$ 1; 共15个

5. 设"$\sim$"是集合X上的一个等价关系. 且 $f:X\to Y$ 是一个映射, 使得

$$x\sim x' \Rightarrow f(x)=f(x')$$

求证明: f与$\sim$的这一相容性条件(比第2段讨论的条件要弱)允许我们定义一个从 $X/\sim$ 到Y的诱导映射 $\bar f: \bar x\mapsto f(x)$, 它给出了分解式 $f=\bar f\cdot p$. 但 $\bar f$ 不一定是单射. $\bar f$ 成为单射的条件是什么?

证明: $\bar f$ 是良定义的. 1) $\forall \bar x\in X/\sim$. 由于商映射p是满射. 故 $\exists x\in X$. 使 $p(x)=\bar x$; ~~f(x)~~ $\because$ f是X到Y的映射 $\therefore \forall x\in X$. 有象 $f(x)\in Y$ 存在 $\therefore \bar f(\bar x)\in Y$ 也存在;

2) $\forall \bar x\in X/\sim$. 若 $x_1,x_2\in X$. 使 $x_1,x_2\in\bar x$. 即 $p(x_1)=p(x_2)$. 即 $x_1\sim x_2$

故 $f(x_1)=f(x_2)$ $\therefore \bar f(\bar x)$ 的象是唯一的.

故 $\bar f$ 是一个映射. 且给出分解式: $f(x)=\bar f(p(x))$ 即 $f=\bar f\circ p$

若 $\bar f$ 是单射. 即要求 ~~$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \bar f(\bar x_1)=\bar f(\bar x_2)$. 即成立. 即 $x_1\sim x_2\Rightarrow$~~

$\bar f(\bar x_1)=\bar f(\bar x_2)\Rightarrow \bar x_1=\bar x_2$ 成立. 即 $\bar f(p(x_1))=\bar f(p(x_2))\Rightarrow x_1\sim x_2$ 成立

即 $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1\sim x_2$ 成立.

6. 由法则 $n\to n^2$ 给出的映射 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 有右逆吗？给出 f 的两个左逆.

答：假设右逆存在为 g，即 $f\circ g=id_{\mathbb{N}}$，即对 $\forall x\in\mathbb{N}$，$\exists y\in\mathbb{N}$，使 $f(y)=x=y^2$，且 $g(x)=y$

则 $g(x)=\sqrt{x}$ 而 $g(x)=\sqrt{x}$ 映射将 $\mathbb{N}$ 映射到 $\mathbb{R}$，而 f 的定义域为 $\mathbb{N}$，故右逆不存在.

设 g_1 和 g_2 是 f 的左逆，定义 ~~$g_1(x)$~~ $g_1(x)=\begin{cases} y & 若\exists y\in\mathbb{N}，使 y^2=x \\ 0 & 若对\forall y\in\mathbb{N}，有 y^2\neq x \end{cases}$

$\forall x\in\mathbb{N}$ ∴ ~~$g_1(x)$~~ $g_1\circ f(x)=g_1(f(x))=g_1(x^2)=x$ ∴ $g_1\circ f=id_{\mathbb{N}}$

（Bug 是 g_1 不一定是映射，验证 g_1 的良定义。首先 $\forall x\in\mathbb{N}$，$\exists y\in\mathbb{N}$ 或 0，使 $g_1(x)=y$ 或 $g_1(x)=0$；
其次对 $\forall x,y\in\mathbb{N}$，若 $x=y$ 则 $g_1(x)=g_1(y)$，因为使得 $z^2=x=y$ 的 $z\in\mathbb{N}$ 只有一个或者 $g_1(x)=g_1(y)=0$，
故 g_1 是一个映射）

定义 g_2 为 $\begin{cases} y & 若\exists y\in\mathbb{N}，使 y^2=x \\ 1 & 若对\forall y\in\mathbb{N}，有 y^2\neq x \end{cases}$　　$\forall x\in\mathbb{N}$　$g_2\circ f(x)=g_2(x^2)=x$ ∴ $g_2\circ f=id_{\mathbb{N}}$

7. 对于 $\mathbb{R}$ 我们定义等价关系"~"：$\forall x,y\in\mathbb{R}$，$x\sim y\Leftrightarrow x-y\in\mathbb{Q}$，证明 $\mathbb{R}/\sim$ 是不可数集，并试说明其与 $\mathbb{R}$ 等势.

证明：分析 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ 中元素.

$\mathbb{Q}$ 中所有有理数在 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ 中仅一个元素 $\bar{0}$.

所以首先无理数集 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 到 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}-\{\bar{0}\}$ 有一个满射，再注意到在 $\mathbb{R}$ 中和一个元素等价的元素的势为 $|\mathbb{Q}|$

所以 $(\mathbb{R}/\mathbb{Q}-\{\bar{0}\})\times\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 有一个双射 ~~($\varphi: a\mapsto\bar{a}$，若 $\bar{a}\neq\bar{b}$ 即 $a-b\notin\mathbb{Q}$ ∴ $a-b\neq0$ ∴ $a\neq b$ ∴ 单射)~~

下面我们只需说明 $|(\mathbb{R}/\mathbb{Q}-\{\bar{0}\})\times\mathbb{Q}|=|\mathbb{R}/\mathbb{Q}-\{\bar{0}\}|=|\mathbb{R}/\mathbb{Q}|$，以及 $|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}|=|\mathbb{R}|$ 即可

（这对应基数的两个基本性质，α,β 为基数 $\alpha>\beta$，那么 $|\alpha\times\beta|=|\alpha|$；$|\alpha-\beta|=|\alpha|$）.

① $|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}|=|\mathbb{R}|$

相当于 $\mathbb{R}=(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cup\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 之间有双射

而不可数基数集并上可数集与原来这个不可数集是等势的.

② $|(\mathbb{R}/\mathbb{Q}-\{\bar{0}\})\times\mathbb{Q}|=|\mathbb{R}/\mathbb{Q}-\{\bar{0}\}|$

我们采用
$$\begin{array}{ccc} |(\mathbb{R}/\mathbb{Q}-\{\bar{0}\})\times(\mathbb{R}/\mathbb{Q}-\{\bar{0}\})| & = & |\mathbb{R}/\mathbb{Q}-\{\bar{0}\}| \\ \vee| & & \wedge| \\ |(\mathbb{R}/\mathbb{Q}-\{\bar{0}\})\times\mathbb{Q}| & = & |(\mathbb{R}/\mathbb{Q}-\{\bar{0}\})\times\mathbb{Q}| \end{array}$$
来证明

而 $|X\times X|=|X|$，$X=\mathbb{R}/\mathbb{Q}-\{\bar{0}\}$ 有个用选择公理(Zorn 引理)的证法

取 P 为 (A,f) 序对之集，其中 A 为 X 的子集，$f:A\to A\times A$ 双射

在 P 上定义偏序关系 $(A,f)\leq(B,g)\Leftrightarrow A\subseteq B$ 且 $g|_A=f$

任取 P 的一条链 $\{(A_i,f_i)\}_{i\in I}$，显然有上界 $(\bigcup_{i\in I}A_i,f)$，f 由 f_i 拼接得到

故 $(P,\leq)$ 满足 Zorn 引理条件，存在最大元 (A,f)，若我们证明 A 与 X 等势，那么 $X\to X\times X$ 就存在双射了.

下证之，若 $|A|<|X|$，因为 $X=A\cup X\setminus A$，故 $|X|=|X\setminus A|$，故存在 $g:A\to X\setminus A$ 单射

记 $B=g(A)$，由于 A 和 B 等势，所以 $B\to B\times B$ 也存在双射，从而我们可以构造 $h:A\cup B\longrightarrow(A\cup B)\times(A\cup B)$
$=B\times B\cup A\times A\cup A\times B\cup B\times A$ 的双射，因此 $(A,f)\leq(A\cup B,h)$ 这与 (A,f) 最大元矛盾，从而 $|X|=|X\times X|$