第四次习题课讲义.

① 上课内容回顾

1. 子空间的交,和,都还是子空间　子空间的直和与表示唯一性.(任意有限个空间该如何推广?)

子空间的并不一定是子空间

2. 一组向量生成的子空间该如何研究?

问题的解决引出了基与维数的概念。

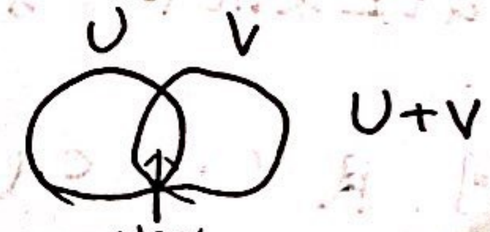
i) 一组向量生成的子空间与其极大线性无关组生成的子空间一致. (cor: 任意2个极大线性无关组生成的子空间一致)

ii) 一组向量的极大线性无关组个数相同 (所以称随便一个极大线性无关组为这个子空间的基,个数称为子空间维数)

iii) 生成的子空间可用基的线性组合来表示,并且表示是唯一的(对于取定的基)

3. 这组向量生成的子空间的基该如何找?是否存在以这组向量的线性无关组为一部分的基?

问题的解决依赖于基扩充定理



4. 针对交与和的维数的探讨

这个探讨对于2个子空间来说非常容易,利用基扩充定理即可证明 $\dim U+\dim V=\dim U+V+\dim U\cap V$

但对于多个(有限个)子空间来说,不是那么轻松,但大致也能猜到和容斥原理一样.

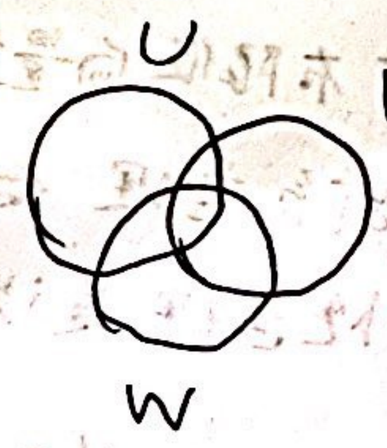
~~$+\dim U+\dim V+\dim W+\dim U+V+W$~~

~~$+\dim U+V+\dim V+W$~~

~~$\geq \dim U\cap V+\dim U\cap W+\dim V\cap W$~~

~~$+\dim U+V+\dim V+W+\dim U+W$~~

~~$+\dim U+V+W$~~



而且由于 $(U+V)\cap W\supseteq U\cap W+V\cap W$

$(U\cap V)+W\subseteq (U+W)\cap(V+W)$

3个以上就无法取等号!

例如3个时候 $\dim U+\dim V+\dim W+\dim U\cap V\cap W\geq \dim U\cap V+\dim U\cap W+\dim V\cap W+\dim U+V+W$

5. 行秩 = 列秩　　初等I,II

问题的解决依赖于域上的行列变换均不改变行秩与列秩.

② 习题解答

③ 拓展内容

1) 补空间

2) 多个子空间的和何时为直和的探讨

3) 多个子空间的维数不等式 并试图探究个个的时候取等条件

1) 补空间

对于有限维的向量空间，基扩充定理 <=> 补空间存在性

而以后学习泛函分析的时候，我们会发现 无限维的向量空间（例如 Hilbert空间）上 基扩充定理 仍与 补空间存在性 等价

当然此时均建立在 ZFC 公理系统下，否则无限维的线性基存在都成问题！

定义：V, U, W 为向量空间，且 $V, W \subseteq U$

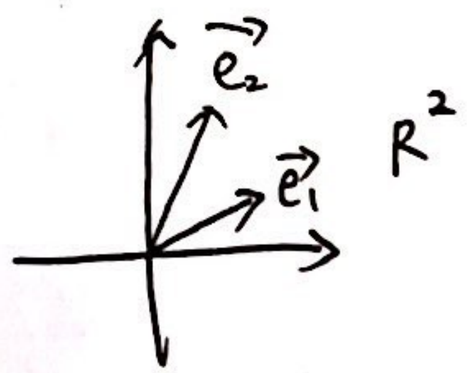
若 $V \oplus W = U$ 则称 W 为 V 在 U 中的补空间，V 为 W 在 U 中的补空间

定理 Thm：对于有限维向量空间

基扩充定理 $\Leftrightarrow$ 补空间存在性定理

（补空间存在性定理是说 $V \subseteq U$ 则存在 $W \subseteq U$ 使得 $V \oplus W = U$）

例子：



$V = \langle \vec{e_1} \rangle$

找到 V 在 R^2 中的所有补空间。

其实即为与 $\vec{e_1}$ 不同向，不异向的任意一个向量生成的子空间

比如 $\langle \vec{e_2} \rangle \oplus \langle \vec{e_1} \rangle = R^2$

2) 如何时为直和?

由定义知道，2个子空间的和为直和 $\Leftrightarrow$ 子空间的交为零向量

再由维数公式 $\Leftrightarrow$ 子空间的和的维数等于子空间维数之和

再由基的存在性 $\Leftrightarrow$ 每一个向量的和式表示唯一 $\Leftrightarrow$ 零向量的和式表示唯一 $\Leftrightarrow$ 2个子空间的基组成了其和的基

而对于多个子空间的和，我们该如何确定它是不是直和呢?

定义：$V_1, \cdots, V_s$ 为向量空间 V 的子空间

若和 $V_1+\cdots+V_s$ 中每个向量 α 都能唯一的表示为 $\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_s$，$\alpha_i \in V_i$

那么称和 $V_1+\cdots+V_s$ 为直和，记作 $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$

我们采用第3种等价来定义

由此我们能否得到类似的4个等价呢? 答案是肯定的!

定理Th $V_1, \cdots V_s$ 为向量空间 V 的子空间，则下列命题相互等价

① $V_1+\cdots+V_s$ 为直和

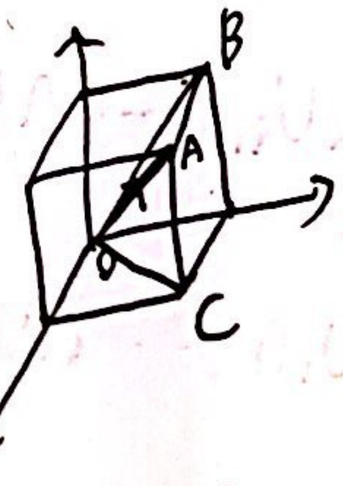
② 零向量的表示唯一

③ $V_i \cap \left(\sum_{j\neq i} V_j\right) = 0 \quad \forall i=1,2,\cdots s$

④ $\dim V_1+\cdots+V_s = \dim V_1+\cdots+\dim V_s$

⑤ V_1的基，V_2的基，$\cdots$，V_s的基组成了 $V_1+\cdots+V_s$ 的基

例子：



$\langle\overrightarrow{OA}\rangle+\langle\overrightarrow{OB}\rangle+\langle\overrightarrow{OC}\rangle$ 即为 R^3 且为直和

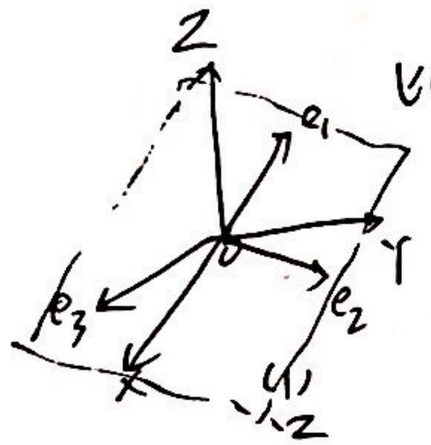
而 R^3 中任意3个向量分别生成的子空间的和为直和 当且仅当异面!

3) 在多个子空间的和不是直和的情况下

相对应的维数公式比较复杂！而且在超过2个的维数公式往往不取等号！

例如3个的时候，$\dim U + \dim V + \dim W + \dim U\cap V\cap W$

$$\geq \dim U+V+W + \dim U\cap W + \dim V\cap W + \dim U\cap V.$$



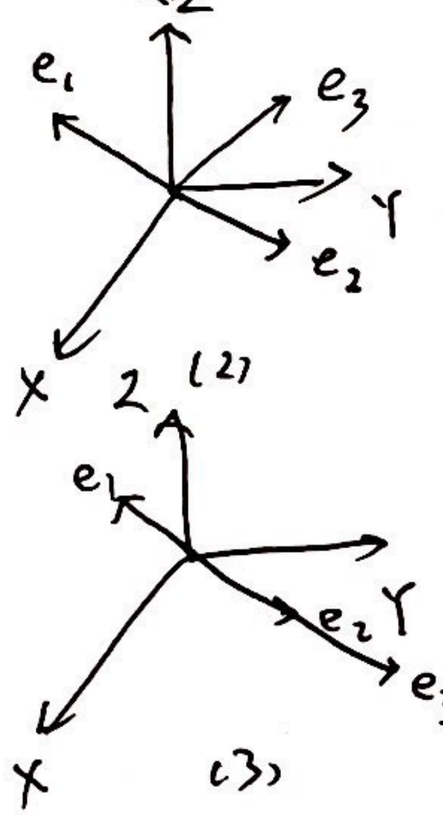
比如 R^3 中 3个共面的向量分别生成的子空间 $\langle\vec{e_1}\rangle = U$ $\langle\vec{e_2}\rangle = V$, $\langle\vec{e_3}\rangle = W$.

(但不共线且不重合)

$\dim U+V+W = 2$ $\dim U\cap W = \dim V\cap W = \dim U\cap V\cap W = 0$

此时 $3 \geq 2$

但是若其中2个向量不同向，但是异向，剩下一个与它们不共线



$\dim U\cap V = 1$ $\dim V\cap W = \dim U\cap W = \dim U\cap V\cap W = 0$

$\dim U+V+W = 2$

此时 $3=3$ 取等

若3个向量共线的话

$\dim U\cap V\cap W = 1$ $\dim U\cap W = \dim U\cap V = \dim V\cap W = 1$

$\dim U+V+W = 1$

此时 $4=4$ 取等

所以我们发现不只是 U, V, W 的和是直和的情况取等

而对于 n个的情况，利用归纳法 我们一样有

$$\sum_{i=1}^{n} \dim U_i \geq \dim \sum_{i=1}^{n} U_i$$

更精细地有 $\sum_{i=1}^{n} \dim U_i - \sum_{\text{certain } i\neq j} \dim U_i\cap U_j + \sum_{i\neq j\neq k} \dim U_i\cap U_j\cap U_k \cdots + (-1)^s \sum_{i_1,\cdots i_s\text{各异}} \dim U_{i_1}\cap\cdots\cap U_{i_s} + \cdots$

$$+ (-1)^n \dim U_1\cap\cdots\cap U_n \geq \dim \sum_{i=1}^{n} U_i$$

而一般情况的取等条件是才分复杂，而且意义不大。