

① 上课程内容回顾

1) 矩阵的秩以及其应用

应用1 给出了以A为系数矩阵的齐次线性方程组的解存在性的充分必要条件

应用2 给出了以A为系数矩阵的非齐次线性方程组的解存在性的充分必要条件

其核心定理: 对定理 $\text{rank}(A) + \dim V_A = n$ 若 $A \in R^{m \times n}$, V_A 为齐次方程组的解空间

2) 线性映射

核心定理: $\text{Hom}_R(R^n, R^m) \xrightarrow{\text{isom}} M_{m \times n}(R)$ (取定 R^n 的标准基之后)

$\varphi \longmapsto \varphi$ 在标准基下的矩阵

$$L_A \longmapsto A$$

$$L_A v = Av$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} v_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} v_j \end{pmatrix}$$

(more: 事实上若不取标准基, 上述对应依然存在, 即这是一个自然对应!)
有了这个核心定理: 我们研究线性映射的一些性质, 可转化为研究其对应矩阵的性质

比如: $\ker \varphi$ 是否为0 与 V_A 是否为0 等价

(Furthermore, $\dim \ker \varphi = \dim V_A$)

$\text{Im } \varphi$ 是否为 R^m 与 A 是否满秩等价

(Furthermore, $\dim \text{Im } \varphi = \dim V_c(A) = \text{rank}(A)$)

问题是: 给定 $v_1, \dots, v_t$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中线性无关

如何判断 $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_t)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中是否线性无关.

2. 给定 $V \subseteq \mathbb{R}^m$

如何判断 $\text{Im } \varphi$ 是否包含 V .

Answer: 取 $\mathbb{R}^n$ 标准基 以及 记 A 为 φ 在标准基下的矩阵.

那么由核心定理 $\varphi(v_i) = Av_i =$

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} v_{ij} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} v_{ij} \end{pmatrix}$$

$$v_i = \begin{pmatrix} v_{i1} \\ \vdots \\ v_{in} \end{pmatrix} \quad i=1, 2, \dots, t$$

最后看 $(Av_1, \dots, Av_t)$ 是否为 t 即列秩是否为 t 即可.

Furthermore, 而由维数公式 $\dim \langle Av_1, \dots, Av_t \rangle$ 为 $(Av_1, \dots, Av_t)$ 的列秩.

前者 $\dim \langle v_1, \dots, v_t \rangle = t$

核 $\dim \langle Av_1, \dots, Av_t \rangle = t \Leftrightarrow \ker \varphi \cap \langle v_1, \dots, v_t \rangle = \{0\} \Leftrightarrow \ker \varphi \cap \langle v_1, \dots, v_t \rangle = \{0\}$

Answer 2: 取 V -基 $b_1, \dots, b_s$

$\text{Im } \varphi \supset \langle b_1, \dots, b_s \rangle \Leftrightarrow b_i \in \text{Im } \varphi \quad \forall i=1, 2, \dots, s$

$\Leftrightarrow (A | b_i)$ 非齐次方程组有解

$\Leftrightarrow \text{rank}(A | b_1, \dots, b_s) = \text{rank } A$

(这里有一个充分条件 A 为列满秩 的时候 $\text{rank}(A | b_1, \dots, b_s) = \text{rank}(A)$ 自动成立) 或者利用 $\ker \varphi$ 为满射也可以看出)

② 习题 11 解答:

③ 拓展内容

1) 线性映射在子空间上的限制

从刚才的 Answer 1 可以看出限制到子空间上来研究线性映射是一个十分有效的方法

而上课讲过 (命题 3.2) $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 线性映射 U 为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, V 为 $\mathbb{R}^m$ 的子空间

那么 $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ 子空间

$\varphi^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^n$ 子空间

由此可以定义 2 个限制后的线性映射: $\varphi|_U: U \rightarrow \varphi(U)$

$$\varphi|_U(x) = \varphi(x) \quad \forall x \in U$$

$$\varphi|_{\varphi^{-1}(V)}: \varphi^{-1}(V) \rightarrow V$$

$$\varphi|_{\varphi^{-1}(V)}(x) = \varphi(x) \quad \forall x \in \varphi^{-1}(V)$$

两种线性映射 其实 满足这样的关系

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi|_U} & \varphi(U) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi|_{\varphi^{-1}(V)} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

我们一般称 $\varphi|_U$ 为 φ 限制在 U 上的线性映射

而既然 φ 是线性映射, 看看 $\ker \varphi|_U$, $\text{Im } \varphi|_U$ 与 $\ker \varphi$, $\text{Im } \varphi$ 有什么关系

$$\text{Prop: } \ker \varphi|_U = \ker \varphi \cap U, \quad \text{Im } \varphi|_U = \text{Im } \varphi \cap \varphi(U) = \varphi(U)$$

$$\Rightarrow \dim \ker \varphi|_U + \dim \varphi(U) = \dim U$$

② 通过矩阵表示来研究线性映射

我们知道给定 $\varphi: R^n \rightarrow R^m$ 线性映射

取 R^n 标准基, R^m 标准基 可以给出 φ 的矩阵表示

$$\text{即 } A = (\varphi(e_1) \cdots \varphi(e_n))$$

而我们常常会遇到 φ 并不是直接定义在标准基上的

所以需要考虑到在不同基的情况下, φ 的矩阵表示和上述 A 有什么联系!

取 R^n 基 $v_1, \dots, v_n$, R^m 标准基 $\eta_1, \dots, \eta_m$

$$\varphi(v_i) = a_{i1}\eta_1 + \cdots + a_{im}\eta_m \quad \forall i=1,2,\dots,n$$

$$\text{从而有 } (\varphi(v_1) \cdots \varphi(v_n)) = (\eta_1 \cdots \eta_m) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

这时候我们称 $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$ 为 φ 在 $v_1, \dots, v_n$ 基下对于 $\eta_1, \dots, \eta_m$ 的矩阵表示

~~记 $(v_1, \dots, v_n)$ 在标准基下~~

为了研究上述矩阵与 A 的关系, 我们引入转移矩阵的概念

假设 $v_i' = s_{i1}v_1 + \cdots + s_{in}v_n \quad \forall i=1,2,\dots,n$

R^n 两组基 $v_1, \dots, v_n$ 到 $v_1', \dots, v_n'$ 的转移矩阵是指: v_i' 的转移矩阵

$$\begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{1n} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 $v_1, \dots, v_n \rightarrow v_1', \dots, v_n'$ 的转移矩阵

下面来研究它们的关系 记标准基到 $v_1, \dots, v_n$ 的转移矩阵为 V (其实即为 v_i 组成的列向量的矩阵)

$$\varphi(v_i) = \varphi(v_{i1}e_1 + \cdots + v_{in}e_n) = v_{i1}\varphi(e_1) + \cdots + v_{in}\varphi(e_n) = A \begin{pmatrix} v_{i1} \\ \vdots \\ v_{in} \end{pmatrix}$$

$$= (v_{i1} \cdots v_{in}) A$$

再记标准基为 $\eta_1, \dots, \eta_m$ 的线性组合为 U

$$\eta_i = U_{i1}e_1 + \dots + U_{im}e_m \quad U = \begin{pmatrix} U_{11} & \dots & U_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ U_{m1} & \dots & U_{mm} \end{pmatrix}$$

那么 $a_{i1}\eta_1 + \dots + a_{im}\eta_m$

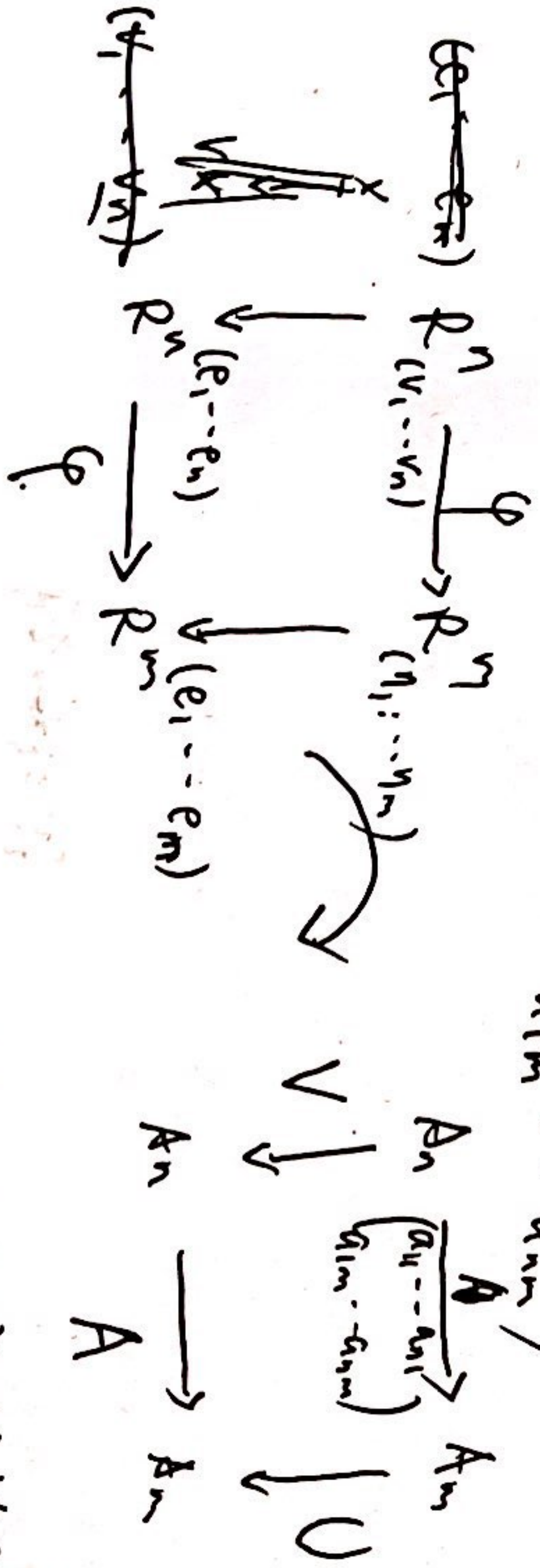
$$= \cancel{a_{i1}U_{11} + a_{i2}U_{12} + \dots + a_{im}U_{1m}} e_1 + \dots + \cancel{(a_{i1}U_{m1} + a_{i2}U_{m2} + \dots + a_{im}U_{mm})} e_m$$

故 $(\eta_1, \dots, \eta_m) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{im} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{im} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$

$$= (e_1, \dots, e_m) U \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{im} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

而 $\varphi(v_1, \dots, v_n) = AV = U \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{im} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$

所以关系为 $AV = U \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{im} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$



用图来表示即为这个交换图.

这一交换图是通过矩阵为研究线性映射的本质原因

有了以上准备, 如何具体地操作呢?

例子: 情形1. 给了线性映射 $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

假设我们知道了 $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$ 在 $e_1, \dots, e_n$ 标准基下的坐标

我们想求 $\text{Im } \varphi, \text{Ker } \varphi$ 在标准基下坐标

问题解答: $\text{Im } \varphi$ 容易表示 即为坐标 $(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n))$ 的张成空间

$\text{Ker } \varphi$ 就需要用到其与 φ 在标准基下的矩阵表示与 $(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n))$ 的关系

首先 $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in \text{Ker } \varphi$

$$\Leftrightarrow a_1 \varphi(v_1) + \dots + a_n \varphi(v_n) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a_1, \dots, a_n) \text{ 为以 } (\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)) \text{ 为系数的齐次方程组的解}$$

但我们想知道 $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ 在 $e_1, \dots, e_n$ 下的坐标

其为 $(v_1, \dots, v_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 记为 φ 在标准基下的矩阵表示 A 为系数的齐次方程组的解的坐标

$$\text{由上述关系 } AV = (\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)) \text{ 故 } \text{Ker } \varphi \text{ 中向量坐标为以 } A \text{ 为系数的齐次方程组的解的坐标}$$

情形2 给了线性映射 $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

假设我们知道 $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ 在 $v_1, \dots, v_m$ 下的坐标

我们想求 $\text{Im } \varphi, \text{Ker } \varphi$ 在标准基下坐标

问题解答: $\text{Ker } \varphi$ 容易表示 即为 $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ 在 $v_1, \dots, v_m$ 下的坐标矩阵

$$\text{即 } \varphi(e_1) = a_{11} v_1 + \dots + a_{m1} v_m \quad \text{那么 } \text{Ker } \varphi \text{ 中向量坐标为 } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_1 x_1 + \dots + e_n x_n) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \varphi(e_1) & \dots & \varphi(e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (v_1, \dots, v_m) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

$I_m \varphi$ 同样用到上述关系

$$A = U \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$U = (\eta_1 \cdots \eta_m) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \text{ 为 } (\varphi(e_1) \cdots \varphi(e_m)) \text{ 在 } \eta_1, \cdots, \eta_m \text{ 下的坐标矩阵}$$

那么 φ 在标准基下的矩阵表示为 $A =$ 两者相乘

$$= (a_{11}\eta_1 + \cdots + a_{1m}\eta_m, a_{21}\eta_1 + \cdots + a_{2m}\eta_m, \cdots, a_{n1}\eta_1 + \cdots + a_{nm}\eta_m)$$

而 $I_m \varphi$ 即为 A 的列空间

