1.(1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & 5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 13 & 17 & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{11}{2} & -2 & \frac{5}{2} & \frac{13}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 13 & 17 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{135}{26} & \frac{5}{2} & \frac{191}{26} \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & x & -1 & 2 \\ 2 & -1 & x & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & x & -1 & 2 \\ 0 & -1-2x & x+2 & 1 \\ 0 & 10-x & -5 & -1 \end{pmatrix}$

① 当 $-1-2x=0$ 时. $x=-\frac{1}{2}$ $\therefore 10-x\neq 0$ 秩为3.

② 当 $-1-2x\neq 0$ 时. 作初等行变换

② $\xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & x & -1 & 2 \\ 0 & -1-2x & x+2 & 1 \\ 0 & 0 & -5+\frac{(x+2)(10-x)}{1+2x} & -1+\frac{10-x}{1+2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & -1 & 2 \\ 0 & -1-2x & x+2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(-x+3)(x+5)}{1+2x} & \frac{-3x+9}{1+2x} \end{pmatrix}$

2.1 当 $(-x+3)(x+5)\neq 0$. 即 $x\neq 3$ 且 $x\neq -5$ 时, $-3x+9\neq 0$ 秩为3.

2.2 当 $-x+3=0$ 时 $-3x+9=0$. 秩为2

2.3 当 $x+5=0$ 时. $x=-5$, $-3x+9\neq 0$. 秩为3.

综上所述 当 $x=3$ 时. 秩为2. 当 $x\neq 3$ 时.秩为3.

(3) $\begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列减}a_1\text{倍 最后一列,减}a_2\text{倍 倒数第2列,}\cdots\cdots]{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ 秩为 $n+1$.

2.(1) 证明: $\forall \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$ $a,b\in\mathbb{R}$ $\varphi(a\vec{x}+b\vec{y})=\lambda(a\vec{x}+b\vec{y})=\lambda a\vec{x}+\lambda b\vec{y}=a\varphi(\vec{x})+b\varphi(\vec{y})$. 故是线性映射

在标准基下的矩阵 $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$

令 $\varphi(\vec{x})=\vec{0}=\lambda\vec{x}$ 若 $\lambda=0$ 时. $\ker(\varphi)=\mathbb{R}^n$ 基为 $\vec{e_1},\vec{e_2},\cdots,\vec{e_n}$ $\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^n$. $\varphi(x)=\vec{0}$ $\mathrm{Im}(\varphi)$ 为 $\vec{0}$

若 $\lambda\neq 0$ $\ker(\varphi)=\vec{0}$ 基为 $\vec{0}$, 即只有零向量 $\lambda\vec{x}=\vec{0}$. $\mathrm{Im}(\varphi)=\mathbb{R}^n$ 基为 $\vec{e_1},\cdots\vec{e_n}$

(2) 证明 $\forall\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^3$. $a,b\in\mathbb{R}$.

$$\varphi(a\vec{x}+b\vec{y})=\varphi\begin{pmatrix} ax_1+by_1 \\ ax_2+by_2 \\ ax_3+by_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax_1+by_1+ax_2+by_2+2(ax_3+by_3) \\ ax_2+by_2+ax_3+by_3 \\ 3(ax_1+by_1)-(ax_2+by_2)+2(ax_3+by_3) \\ 5(ax_1+by_1)-4(ax_2+by_2)+ax_3+by_3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (ax_1+ax_2+2ax_3)+(by_1+by_2+2by_3) \\ ax_2+ax_3+by_2+by_3 \\ (3ax_1-ax_2+2ax_3)+(3by_1-by_2+2by_3) \\ (5ax_1-4ax_2+ax_3)+(5by_1-4by_2+by_3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax_1+ax_2+2ax_3 \\ ax_2+ax_3 \\ 3ax_1-ax_2+2ax_3 \\ 5ax_1-4ax_2+ax_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} by_1+by_2+2by_3 \\ by_2+by_3 \\ 3by_1-by_2+2by_3 \\ 5by_1-4by_2+by_3 \end{pmatrix}$$

$$=a\begin{pmatrix} x_1+x_2+2x_3 \\ x_2+x_3 \\ 3x_1-x_2+2x_3 \\ 5x_1-4x_2+x_3 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} y_1+y_2+2y_3 \\ y_2+y_3 \\ 3y_1-y_2+2y_3 \\ 5y_1-4y_2+y_3 \end{pmatrix}=a\varphi(\vec{x})+b\varphi(\vec{y})$$

在标准基下的矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

令 $\varphi(\vec{x})=\vec{0}$ 对线性齐次方程组的系数矩阵作初等变换:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $x_1=-x_3$, $x_2=-x_3$ $\therefore$ 基础解系为 $(-1,-1,1)^T$

$\ker(\varphi)=\left\langle\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle$

对 $\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\3&-1&2\\5&-4&1\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{作初等列变换}} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\3&-4&-4\\5&-9&-9\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&-4&0\\5&-9&0\end{pmatrix}$ $Im(\varphi)=\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\3\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-4\\-9\end{pmatrix}\right\rangle$

3. 1) 证明: "$\Rightarrow$" 若A不是列满秩 $\exists$非零$\lambda_1,\dots,\lambda_n$ 使 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi(\vec{e_i})=\vec{0}$ 其中 $\vec{e_i}\in\mathbb{R}^n$

即 $\varphi(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{e_i})=0$. 令 $\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{e_i}$ $\because\lambda_1,\dots\lambda_n$不全为零 $\therefore\exists i$ 使 $x_i=\lambda_i\neq0$ $\therefore\vec{x}\neq\vec{0}$

$\therefore\varphi(\vec{x})=\varphi(\vec{0})=\vec{0}$ $\therefore\varphi$不是单射, 矛盾.

"$\Leftarrow$" 若$\varphi$是列满秩, 假设 $\varphi(\vec{x})=\vec{0}=\varphi(\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{e_i})=\sum_{i=1}^{n}x_i\varphi(\vec{e_i})$ $\because\varphi$列满秩

$\therefore\varphi(\vec{e_i})$线性无关 $\therefore$只有零解 即 $x_1=x_2=\dots=x_n=0$ $\therefore\vec{x}=\vec{0}$ $\varphi$是单射

2) 证明: "$\Rightarrow$" $\because\varphi$是满射 $\therefore Im(\varphi)=\mathbb{R}^m=\langle\vec{e_1},\dots\vec{e_m}\rangle=\langle A$的列向量$\rangle$ $\therefore rank(V_c(A))=m=rank(V_r(A))$

$\therefore$A是行满秩

"$\Leftarrow$" $\because$A行满秩 $\therefore rank(V_c(A))=rank(V_r(A))=m$ $\therefore Im(\varphi)=\langle V_c(A)\rangle$ 中A的列向量的极大线性无关组有m个~~元素~~向量, 而$\mathbb{R}^m$的极大线性无关组也有m个向量. $\therefore$对于$\mathbb{R}^m$中任意向量可由A的列向量的极大线性无关组线性表出. 即 $\forall\vec{y}\in\mathbb{R}^m$, $\vec{y}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_iA^{(i)}$ (不妨设$A^{(1)}\dots A^{(m)}$是极大线性无关组).

$\therefore\vec{y}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi(\vec{e_i})=\varphi(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\vec{e_i})$. 则 $\vec{x}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\vec{e_i}$是$\vec{y}$的原象. $\therefore\varphi$是满射. (当$A^{(j_1)},\dots,A^{(j_m)}$是极大线性无关组时, 也有同样的结论)

4. 证明: $\varphi$是线性映射 $\Leftrightarrow$ $\forall\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\varphi(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\cancel{\begin{pmatrix}f_1(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})\\\vdots\\f_m(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})\end{pmatrix}}=\alpha\varphi(\vec{x})+\beta\varphi(\vec{y})$

即 左边 $=\begin{pmatrix}f_1(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})\\f_2(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})\\\vdots\\f_m(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha f_1(\vec{x})+\beta f_1(\vec{y})\\\alpha f_2(\vec{x})+\beta f_2(\vec{y})\\\vdots\\\alpha f_m(\vec{x})+\beta f_m(\vec{y})\end{pmatrix}=$ 右边 $\Leftrightarrow$ $f_i$是$\mathbb{R}^n$上的线性函数.

3. $dim(im(\varphi))=m\Rightarrow Im(\varphi)=\mathbb{R}^m$

证明: $Im(\varphi)$中极大线性无关组有m个向量. 而$\mathbb{R}^m$中极大线性无关组有m个向量. $\therefore\forall\mathbb{R}^m$中$m+1$个向量线性相关 $\therefore\forall\vec{y}\in\mathbb{R}^m$. $\vec{y}$与$Im(\varphi)$中m个极大线性无关组中向量线性相关 即 $\vec{y}$可由$Im(\varphi)$中向量线性表出 $\therefore\mathbb{R}^m\subseteq Im(\varphi)$. $\therefore\mathbb{R}^m=Im(\varphi)$

问题一: 什么时候可以行, 列初等变换同时用, 什么时候不能?

行变换不改变行向量生成的空间, 但改变了列向量生成的空间, 列变换不改变列向量生成的空间, 但改变了行向量生成的空间, 它们都不改变行向量和列向量生成的空间的维数.

不能: 求极大线性无关组 ~~基~~

能: 求维数.

初等行变换与矩阵乘法的关系:

A的第i行加k倍的第j行⟺将如下矩阵左乘矩阵A

$$\begin{array}{c} \\ j \\ i \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&0\\ 0&\cdots&1&\cdots&0&\cdots&0\\ 0&\cdots&k&\cdots&1&\cdots&0\\ 0&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1j}&\cdots&a_{1i}&\cdots&a_{1n}\\ a_{j1}&\cdots&a_{jj}&\cdots&a_{ji}&\cdots&a_{jn}\\ a_{i1}&\cdots&a_{ij}&\cdots&a_{ii}&\cdots&a_{in}\\ a_{n1}&\cdots&a_{nj}&\cdots&a_{ni}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1j}&\cdots&a_{1i}&\cdots&a_{1n}\\ a_{j1}&\cdots&a_{jj}&\cdots&a_{ji}&\cdots&a_{jn}\\ ka_{j1}+a_{i1}&\cdots&ka_{jj}+a_{ij}&\cdots&ka_{ji}+a_{ii}&\cdots&ka_{jn}+a_{in}\\ a_{n1}&\cdots&a_{nj}&\cdots&a_{ni}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

初等行变换改变列向量生成的空间.

A的第i列加k倍的第j列⟺将如下矩阵右乘矩阵A

$$\begin{array}{c} \\ j \\ i \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1j}&\cdots&a_{1i}&\cdots&a_{1n}\\ a_{j1}&\cdots&a_{jj}&\cdots&a_{ji}&\cdots&a_{jn}\\ a_{i1}&\cdots&a_{ij}&\cdots&a_{ii}&\cdots&a_{in}\\ a_{n1}&\cdots&a_{nj}&\cdots&a_{ni}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&0\\ 0&\cdots&1&\cdots&k&\cdots&0\\ 0&\cdots&0&\cdots&1&\cdots&0\\ 0&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1j}&\cdots&ka_{1j}+a_{1i}&\cdots&a_{1n}\\ a_{j1}&\cdots&a_{jj}&\cdots&ka_{jj}+a_{ji}&\cdots&a_{jn}\\ a_{i1}&\cdots&a_{ij}&\cdots&ka_{ij}+a_{ii}&\cdots&a_{in}\\ a_{n1}&\cdots&a_{nj}&\cdots&ka_{nj}+a_{ni}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

类似的, A的第i行与j行互换⟺将矩阵 $\begin{pmatrix}1&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&0\\ 0&\cdots&0&\cdots&1&\cdots&0\\ 0&\cdots&1&\cdots&0&\cdots&0\\ 0&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&1\end{pmatrix}$ 左乘矩阵A; A的第i行乘k⟺将矩阵 $\begin{pmatrix}1&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&0\\ 0&\cdots&1&\cdots&0&\cdots&0\\ 0&\cdots&0&\cdots&k&\cdots&0\\ 0&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&1\end{pmatrix}$ 左乘矩阵A; A的第i列与第j列互换⟺将矩阵↑右乘矩阵A; A的第i列乘k⟺将矩阵↑右乘矩阵A.

矩阵乘法:

映射$\varphi$在标准基下的矩阵为$A_\varphi=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$. 在$\mathbb{R}^n$中的标准基$\vec{e}_1,\vec{e}_2\cdots\vec{e}_n$ ~~问映射在~~

~~问映射$\varphi$将$A_\varphi$的行向量映射成什么?~~ 对于$\mathbb{R}^n$中向量$\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$,即它在标准基$\vec{e}_1,\vec{e}_2\cdots\vec{e}_n$下的坐标为$b_1\cdots b_n$,
~~问它在以$A_\varphi$的行向量为基底下的坐标为什么~~ 问$\varphi(\vec{b})$在以$A_\varphi$的列向量为基底下的坐标是?

$\varphi(\vec{b})=b_1\varphi(\vec{e}_1)+b_2\varphi(\vec{e}_2)+\cdots+b_n\varphi(\vec{e}_n)=b_1A_\varphi^{(1)}+b_2A_\varphi^{(2)}+\cdots+b_nA_\varphi^{(n)}$ 故$\varphi(\vec{b})$在$A_\varphi$的列向量为基底下的坐标是$b_1,\cdots b_n$. 若$A_\varphi^{(1)}$与某些$A_\varphi^{(i_1)}\cdots A_\varphi^{(i_k)}$线性相关且$A_\varphi^{(i_1)}\cdots A_\varphi^{(i_k)}$线性无关, ~~则$\varphi(\vec{b})$在$A_\varphi^{(1)}$上的坐标是$\varphi(\vec{b})$在$A_\varphi^{(i_1)}\cdots A_\varphi^{(i_k)}$上的坐标的线性组合. 即$b_1A_\varphi^{(1)}$可由$A_\varphi^{(i_1)}\cdots A_\varphi^{(i_k)}$线性表出. 且对$\forall$向量在$\mathbb{R}^n$中都成立. 即$\varphi(\vec{b})$对$\forall\vec{b}\in\mathbb{R}^n$, $b_1$都与$b_{(i_1)}\cdots b_{(i_k)}$有同样的线性关系. 若$A_\varphi^{(1)}=\sum_{j=1}^{k}a_jA_\varphi^{(i_j)}$ 则$b_1=\sum_{j=1}^{k}a_jb_{(i_j)}$~~ 若$A_\varphi^{(1)}=\sum_{j=1}^{k}a_jA_\varphi^{(i_j)}$
则$b_1A_\varphi^{(1)}=\sum_{j=1}^{k}b_1a_jA_\varphi^{(i_j)}$. 即若去掉A的列向量的极大线性无关组以外的向量后,仍可找到对$\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, $\varphi(\vec{x})$关于$A_\varphi^{(i_1)}\cdots A_\varphi^{(i_k)}$(不妨设它们是极大线性无关组)的坐标表示,又∵$A_\varphi^{(i_1)}\cdots A_\varphi^{(i_k)}$线性无关,故坐标表示是唯一的(设$U_1=\langle A_\varphi^{(i_1)}\rangle$, $U_1'=\langle A_\varphi^{(i_2)}\cdots A_\varphi^{(i_k)}\rangle$. 则$U_1\cap U_1'=\{\vec{0}\}$ 因为若$\vec{u}=p_1A_\varphi^{(i_1)}=\sum_{j=2}^{k}p_jA_\varphi^{(i_j)}$ 则只有$p_1=\cdots=p_k=0$ ∴$\vec{u}=\vec{0}$)
∴$\varphi(\vec{x})=u_1+u_2$分解唯一, $u_1\in U_1$, $u_2\in U_1'$, 依次类推. $\varphi(\vec{x})=u_1+\cdots+u_k$分解都唯一, $u_1\in\langle A_\varphi^{(i_1)}\rangle,\cdots u_k\in\langle A_\varphi^{(i_k)}\rangle$
∴$\varphi(\vec{x})$只将$\mathbb{R}^n$中元素映射到$\mathbb{R}^m$中某子空间中的向量,降维. 且将那些~~在第i…该分量上为零的向量映射到~~ 向量$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$满足~~某些线性~~分量满足某些线性关系的向量映射成$\vec{0}\in\mathbb{R}^m$, $\varphi(\vec{x})=A_\varphi\vec{x}$在$\mathbb{R}^m$中的标准基下的坐标为$A_\varphi\vec{x}$. ∴ $AB=\varphi_A(b^{(1)}\cdots b^{(p)})=(\varphi_A(b^{(1)}),\cdots\varphi_A(b^{(p)}))$ 将B的列向量变成$\mathbb{R}^m$某子空间的向量~~组成的~~关于$\mathbb{R}^m$的标准基下的坐标按照列排列.

若矩阵A的第j行关于前面的小于j的某些行有线性关系，而 $i_1, \cdots i_k$ ~~等价于~~ 而第 $i_1, \cdots i_k$ 行是小于 $i$ 的行向量的极大线性无关组，则~~参~~等价于 $(-A_j + \sum_{p=1}^{k} k_{i_p j} A_{i_p} = 0)$

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} 1 & & i_1 & & i_k & & j & & n \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ i_1 \\ i_k \\ j \\ \vdots \\ n \end{matrix} & A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & k_{i_1 j} & \cdots & k_{i_k j} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i_1 1} & \cdots & a_{i_1, n} \\ a_{i_k, 1} & \cdots & a_{i_k, n} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

→（即第j行为零其余行不变）

依次类推

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k_{i_1,1} & k_{i_k,1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & k_{i_1,n} & k_{i_k n} & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ a_{i_1,1} & \cdots & a_{i_1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k,1} & \cdots & a_{i_k,n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}
$$

（即第 $i_1, \cdots i_k$ 行不变其余行为零）

若 $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$，A, B的秩为n，则A, B可由初等变换变成单位矩阵 $diag(1, \cdots, 1)$，同样可由 $diag(1, \cdots, 1)$ 的初等变换得到

∴A, B可写成某些初等矩阵的乘积，若 $C = AB$，C的行空间与B的行空间相同，C列空间与A的列空间相同，若 $D = BA$，则D不一定与C相同。

$\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，$\psi: \mathbb{R}^{s} \to \mathbb{R}^n$，$\xi: \mathbb{R}^t \to \mathbb{R}^s$ 分别对应在标准基下的矩阵A, B, C.

$$
\begin{aligned}
rank(ABC) &= dim(Im(\varphi \circ \psi \circ \xi)) \\
&= dim(Im(\varphi)|_{Im(\psi \circ \xi)}) \\
&= dim(Im(\psi \circ \xi)) - dim(ker(\varphi)|_{Im(\psi \circ \xi)}) \\
&\geq rank(BC) - dim(ker(\varphi)|_{Im(\psi)}) \\
&= rank(BC) - dim(Im(\psi)) + dim(Im(\varphi)|_{Im(\psi)}) \\
&= rank(BC) - dim(Im(\psi)) + dim(Im(\varphi \circ \psi)) \\
&= rank(BC) - rank(B) + rank(AB)
\end{aligned}
$$

$\therefore rank(ABC) + rank(B) = rank(BC) + rank(AB)$