第六次习题课讲义

① 上课内容回顾

1、矩阵的运算：求和，数乘，转置，乘积
以及相对应的秩关系

2、矩阵的乘法的线性映射意义

3、矩阵分块入门，秩的不等式

② 习题讲解

③ 拓展知识

1、多个矩阵的 Sylvester 不等式

2、 $r(A)=r(AA^T)$ $\forall A\in R^{n\times n}$

3、 行空间与零空间的正交关系

4、 矩阵幂次秩的稳定性

(5. 秩一矩阵初探.)

1、多个矩阵的 Sylvester 不等式我们也称 Frobenius 秩不等式

$A,B,C\in R^{m\times n}, R^{n\times s}, R^{s\times t}$

则 $r(ABC)+r(B)\geqslant r(AB)+r(BC)$

将 A,B,C 看作 $R^n\to R^m$, $R^s\to R^n$, $R^t\to R^s$ 的线性映射 $\varphi_A,\varphi_B,\varphi_C$

$r(ABC)=\dim(\mathrm{Im}(\varphi_A\circ\varphi_B\circ\varphi_C))$

$=\dim \mathrm{Im}(\varphi_A|_{\mathrm{Im}\,\varphi_B\circ\varphi_C})=\dim \mathrm{Im}\,\varphi_B\circ\varphi_C-\dim\ker(\varphi_A|_{\mathrm{Im}\,\varphi_B\circ\varphi_C})$

$\geqslant r(BC)-\dim\ker(\varphi_A|_{\mathrm{Im}\,\varphi_B})=r(BC)-(\dim \mathrm{Im}\,\varphi_B-\dim \mathrm{Im}(\varphi_A|_{\mathrm{Im}\,\varphi_B}))$

$=r(BC)-r(B)+r(AB)$

取 $B = I_n$, $n=s$ 即为通常的 Sylvester 不等式

由上也可以看出取等条件很简单

$\dim \ker(\varphi_A|_{\operatorname{Im}\varphi_B\circ\varphi_C}) = \dim\ker(\varphi_A|_{\operatorname{Im}\varphi_B})$

有一个充分条件 $\operatorname{Im}\varphi_B\circ\varphi_C = \operatorname{Im}\varphi_B$ 用矩阵的话来说 $r(BC)=r(B)$

此时 $r(ABC)+r(B) = r(AB)+r(BC)$

$$\Downarrow$$

$$r(ABC) = r(AB)$$

2. 利用研究 AA^T 得到的信息来探讨 A 的性质是常用的手段. 如果 $A\in R^{n\times n}$

这里就讲最简单的一个性质 $r(AA^T) = r(A^TA) = r(A)$

(注意 这里 A 必须是实矩阵.)

证明方法非常多，这里采用计算 V_{A^TA} 与 V_A 来得到上述秩等式

$\forall x\in V_{A^TA}$, $A^TAx=0$ 那么 $x^TA^TAx=0$ 即 $(Ax)^TAx=0$

而设 $Ax = \begin{pmatrix} u_1\\ \vdots \\ u_n\end{pmatrix}$ 则 $(Ax)^TAx = \sum_{i=1}^n u_i^2 = 0 \Rightarrow u_i = 0\ \forall i$

故 $Ax=0$ 从而 $V_{A^TA}\subseteq V_A$ 而 $V_A\subseteq V_{A^TA}$ 是显然的

从而 $V_{A^TA} = V_A \Rightarrow \operatorname{rank}(A^TA) = \operatorname{rank}(A)$

$\parallel$ ~~(????)~~

$\operatorname{rank}(AA^T)$

3、行空间和零空间的关系

我们知道 对于 $A \in R^{m\times n}$ 　　$\mathrm{rank}(A) + \dim V_A = n$

它反映了零空间 V_A 与 行空间 的维数之和 $= n$

今天我们将揭示两者更深层的关系：正交性.

定义：$U, V \subseteq R^n$

在 R^n 上 定义一个配对 $\langle\ ,\ \rangle$

$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = u^T v$

若 $\langle u,v\rangle = 0$ 称 u 与 v 正交.

例子：在 R^3 中 两个向量 $\vec{OX}$, $\vec{OY}$ 配对为0 当且仅当 两条直线垂直

而若 U, V 两个子空间满足 $\forall u \in U,\ v \in V$, 均有 $\langle u,v\rangle = 0$

那么 我们 称 U 与 V 正交

若 U 与 V 的和还为 直和 那么 称 U 与 V 的 和 为正交直和，记为 $U \hat{\oplus} V$

例子：在 R^3 中，一个过原点的平面 U 和 向量 $\vec{OX}$ 垂直

显然此时 $\vec{OX} \perp U \Rightarrow \langle \vec{OX} \rangle$ 与 U 正交

而 $\langle \vec{OX} \rangle \oplus U = R^3 \Rightarrow \langle \vec{OX} \rangle$ 与 U 的和为正交直和 记为 $\langle \vec{OX} \rangle \hat{\oplus} U = R^3$

下面我们来证明 零空间 V_A 与 行空间 的和为正交直和 且为 R^n.

① 要说明正交性 任取行空间中元素 $b = A^T X$

要说明 $b^T Y = 0$ 　$\forall Y \in V_A$ 代入 $b^T Y = X^T A Y = 0$

而事实上 这两者等价 即 $b = A^T X$ $\exists X \in R^m \iff b^T Y = 0$ 　$\forall Y \in V_A$

② 要说明直和

任取 $u \in V_A \cap V_{r}(A)$

$\langle u,u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$

从而 $V_A \oplus V_r(A) = \mathbb{R}^n$

4. 矩阵幂次秩的稳定性

研究 $\{\mathrm{rank}(A^m)\}_{m=1}^{\infty}$ 对于 A 的某些性质有极大帮助（主要是 A 对于 0 特征值的空间分解直和项）

而其稳定性是这个序列简单的原因之一 {若不稳定，对于类似的算子就有所谓的"随机性"！研究这种随机性是随机过程这门课的核心之一}

下面主要为了证明 $\exists M \in \mathbb{N}$ s.t $\forall m \geq M$ $\mathrm{rank}(A^m) = \mathrm{rank}(A^{m+1})$

（以后学习更多的理论之后，我们会发现这样的 M 的最小值反映了 A 的重要信息！）

首先：$\mathrm{rank}(A) \geq \mathrm{rank}(A^2) \geq \cdots \geq \mathrm{rank}(A^k) \geq \cdots$

由矩阵乘法 $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ 立刻得到.

然后我们说明若 $\mathrm{rank}(A^k) = \mathrm{rank}(A^{k+1})$ 那么 $\mathrm{rank}(A^k) = \mathrm{rank}(A^{k+1}) = \mathrm{rank}(A^{k+2}) = \cdots$

这利用 1. 中的 $\mathrm{rank}(BC) = \mathrm{rank}(C)$

$\Rightarrow \mathrm{rank}(ABC) = \mathrm{rank}(AB)$ 立刻得到

由此说明 $\{\mathrm{rank}(A^m)\}_{m=1}^{\infty}$ 序列是一个下降的序列 若在某一处停止，那么以后均停止不再下降！

那么这样的 M 可取为下降过程中停止的那一处的指标即可！