

复习: 1. 数制归并法

2. 单射. 满射. 双射. 对于一个映射: 每一个原象都有一个象. 原象集与定义域相同

单射: 每一个象都有唯一的原象

满射: 象集与值域相等 (对任何映射都有)

(fiber) 纤维原象集用 f^{-1} 表示, $f^{-1}(b)$ 表示所有的象为 b 的原象组成的集合.

3. 等价关系: 二元关系 $\sim$ i) 反自反性 ii) 对称性 iii) 传递性.

偏序关系: 二元关系 $\geq$ i) 自反性 ii) 反对称性 $x \geq y, y \geq x \Rightarrow y = x$ iii) 传递性.

4. 置换. 置换乘积. ^{循环} 置换的阶: 使 $\sigma^k = 1$ 的最小 k

$$(1, 3, 2)(2, 7, 5) = (1, 3, 2, 7, 5)$$

$$(1, 3, 2)(2, 5, 3) = \text{~~(1, 3, 2, 5, 3)~~} (1, 3)(2, 5)$$

奇置换. 奇数 τ 对换的乘积得到的置换, 偶置换 $\sim$

一个置换的所有对换分解中对换的 τ 数有相同的奇偶性

5. 商映射: 商集 (等价类: 所有 $\bar{x} = \{y \mid y \sim x, y, x \in S\}$)

商映射 $p: S \rightarrow S/\sim, x \mapsto \bar{x}$

映射 $p: S \rightarrow T$ 对应一个等价关系 $\sim$: 若 $p(x) = p(y)$, 则说 $x \sim y$.

对应一个商集 $S/\sim$: $\bar{x} = \{y \mid p(x) = p(y), x, y \in S\} = p^{-1}(p(x))$.

等价关系对一个商集对应一个商映射, 对应一个映射.

商集 (划分) 对应一个等价关系 $\sim$: 若 $x, y \in$ 同一个划分, 则 $x \sim y$.

对应映射: 若 $x, y \in$ 同一个划分, 则令 $p(x) = p(y) \in T$.

6. $\exists p, q \in \mathbb{Z}^+$, 对 $\forall x, y \in \mathbb{Z}^+$, $px + qy = \gcd(x, y)$.

若 p 是素数 $p \mid ab$, 则 $p \mid a$ 或 $p \mid b$.

7. 方程组求解. 若增广矩阵的秩与系数矩阵秩相同则有解, 否则无解.

行初等变换, 若没有自由变量, 有唯一解. 有自由变量, 有无穷解. 解集是子空间.

8. 求极大线性无关组. ... 求基. 只能进行行变换 (若按列排列, 则只进行列变换)

为什么? 因为行初等变换改变列空间, 列初等变换改变行空间.

9. 矩阵乘积

$$\varphi_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \varphi_B: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^m \quad A_{m \times n} \quad B_{m \times s} \quad A_{m \times n} \quad B_{n \times s}$$

$$\dim(\ker(\varphi_A)) + \dim(\text{Im}(\varphi_A)) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$$

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n \leq \text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$$

作业1: $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^m = ?$

法一: $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+a & b+b+ac+b \\ 0 & 1 & c+c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2a & b+2ac+b \\ 0 & 1 & 2c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+2a & b+2ac+b+ac+b \\ 0 & 1 & c+2c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

猜测 $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 1 & ma & mb + \frac{m(m-1)}{2}ac \\ 0 & 1 & mc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

数学归纳法证明: $m=1$ 时成立

假设 $m=k$ 时成立, 当 $m=k+1$ 时

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & ka & kb + \frac{k(k-1)}{2}ac \\ 0 & 1 & kc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ka+a & kb + \frac{k(k-1)}{2}ac + kac + b \\ 0 & 1 & kc+c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (k+1)a & (k+1)b + \frac{k(k+1)}{2}ac \\ 0 & 1 & (k+1)c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{得证}$$

法二: $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E + \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^k = O_{3 \times 3} \quad \text{当 } k \geq 3 \text{ 时}$$

由矩阵乘法满足分配律

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^m = \left(E + \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^m = E^m + C_m^1 \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + C_m^2 \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 + \dots + C_m^k \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^k$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & ma & mb \\ 0 & 0 & mc \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{m(m-1)}{2}ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ma & mb + \frac{m(m-1)}{2}ac \\ 0 & 1 & mc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & & 1 \\ & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & 0 \\ & 0 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & & 1 \\ & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & 0 \\ & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & 0 \\ & 0 \end{pmatrix}$$

假设 $A^k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & 0 \\ & 0 \end{pmatrix}$ $A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & 0 \\ & 0 \end{pmatrix}$ 成立

3. 分块矩阵乘法. $A_{m \times n}$ $B_{n \times s}$. 设 $A = \begin{pmatrix} A_{1, m \times n_1} & A_{2, m \times (n-n_1)} \\ A_{3, (m-m_1) \times n_1} & A_{4, (m-m_1) \times (n-n_1)} \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} B_{1, n_1 \times s_1} & B_{2, n_1 \times (s-s_1)} \\ B_{3, (n-n_1) \times s_1} & B_{4, (n-n_1) \times (s-s_1)} \end{pmatrix}$

即 A 矩阵的行分成 m_1 行和 $m-m_1$ 行. 列分成 n_1 列和 $n-n_1$ 列

B 矩阵的行分成 n_1 行和 $n-n_1$ 行. 列分成 s_1 列和 $s-s_1$ 列.

则 $AB = \begin{pmatrix} A_1 B_1 + A_2 B_3 & A_1 B_2 + A_2 B_4 \\ A_3 B_1 + A_4 B_3 & A_3 B_2 + A_4 B_4 \end{pmatrix}$ 证明:

$$A_1 B_1 + A_2 B_3 = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n_1} a_{1i} b_{i1} & \sum_{i=1}^{n_1} a_{1i} b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n_1} a_{1i} b_{is_1} \\ \sum_{i=1}^{n_1} a_{2i} b_{i1} & \sum_{i=1}^{n_1} a_{2i} b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n_1} a_{2i} b_{is_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n_1} a_{m_1 i} b_{i1} & \sum_{i=1}^{n_1} a_{m_1 i} b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n_1} a_{m_1 i} b_{is_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{j=n_1+1}^n a_{1j} b_{j1} & \dots & \sum_{j=n_1+1}^n a_{1j} b_{js_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=n_1+1}^n a_{m_1 j} b_{j1} & \dots & \sum_{j=n_1+1}^n a_{m_1 j} b_{js_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} b_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{1i} b_{is_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{m_1 i} b_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{m_1 i} b_{is_1} \end{pmatrix}$$

= AB 的前 m_1 行, 前 s_1 列的子矩阵.

$A_1 B_1 = (5)$ $A_2 B_3 = A_4 B_3 = 0$
 $A_3 B_2 = (13)$ $A_1 B_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$
 $A_4 B_3 = (-2)$

$A_1 B_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $A_2 B_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} A_1 B_1 + A_2 B_3 & A_1 B_2 + A_2 B_4 \\ A_3 B_1 + A_4 B_3 & A_3 B_2 + A_4 B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 5 & -3 & -2 & -1 \\ -3 & -2 & -1 & 13 & 0 \\ 5 & -1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ -3 & -3 \\ -4 & -5 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$

*② 要使 $Ab^{(1)} = a^{(1)}$ 看它的增广矩阵:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{11} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & a_{m1} \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第 } k \text{ 行} \times \frac{a_{11}}{a_{11}}]{\text{初等变换}} \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{11} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & * & 0 \end{array} \right)$$

故增广矩阵的秩总是与系数矩阵秩相同, 一定有解.

当 A 列满秩: 只有一解. 当 A 不是列满秩, 有无穷多解. 且解为 $b^{(1)} = a^{(1)} + \ker(\varphi_A)$.

对于 $Ab^{(i)} = a^{(i)}, i=1, \dots, n$. 同理. 解空间 $b^{(i)} = a^{(i)} + \ker(\varphi_A)$

$\therefore$ 若 $AB_1 = AB_2 = A$ ① A 列满秩. $B_1 = B_2 = I_{n \times n}$

$\therefore B_1 - B_2$ 的秩 $\leq \dim(\ker(\varphi_A))$

② A 不是列满秩 $B_1 - B_2 = (c^{(1)}, \dots, c^{(n)})$, 其中 $c^{(1)}, \dots, c^{(n)} \in \ker(\varphi_A)$

问题: $AB = A$. 可否得到 $B = E_{n \times n}$? 设 $B = (b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(n)})$, $A = (a_{ij})_{m \times n} = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)})$

$AB = (Ab^{(1)}, Ab^{(2)}, \dots, Ab^{(n)})$. 显然若 $B = E_{n \times n}$ 一定有 $AB = A$

$Ab^{(1)}$ 是 $\varphi_A(b^{(1)})$ 在 $\mathbb{R}^m$ 空间中以 $e_1, \dots, e_m$ 为标准基下的坐标. 若要使 $Ab^{(1)} = a^{(1)}$, 即 $\varphi_A(b^{(1)})$ 在 $e_1, \dots, e_m$ 下的坐标为 $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}$, 而已知 $\varphi_A(b^{(1)})$ 在 $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$ 下的坐标为 $b_{11}, b_{21}, \dots, b_{m1}$. 设 $\{a^{(1)}, \dots, a^{(n)}\}$ 的极大线性无关组为 $a^{(1)}, \dots, a^{(r)}$ ($r \leq n$), 且 $r \leq m$

① 当 $r=n$ 时 $Ab^{(1)}$ 关于 $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$ 的坐标表示是唯一的.

(此时 $r=n$) 证明: 显然 $\langle a^{(1)} \rangle \cap \langle a^{(2)}, \dots, a^{(n)} \rangle = \{0\}$. 否则 $\exists \vec{u} \neq 0, \vec{u} = \lambda a^{(1)} = \sum_{i=2}^n \lambda_i a^{(i)}$

则有 $a^{(1)}$ 与 $a^{(2)}, \dots, a^{(n)}$ 线性相关. 由直和的性质, 回忆:

(U 与 V 是直和. 与以下命题等价. 1) $U \cap V = \{0\}$ ($U \cap V = \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$. 则 U, V 都是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.)

2) 若有 $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}$, $\vec{u}' \in U, \vec{v} \in V$. 则 $\vec{u}' = \vec{0}, \vec{v} = \vec{u}$. 唯一的

3) 若有 $\vec{0} = \vec{u}' + \vec{v}$, $\vec{u}' \in U, \vec{v} \in V$, 则 $\vec{u}' = \vec{0}, \vec{v} = \vec{0}$.

4) $\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V)$

$\therefore Ab^{(1)}$ 关于 $a^{(1)}$ 的坐标是唯一的. 同理 $Ab^{(i)}$ 关于 $a^{(2)}, \dots, a^{(n)}$ 的坐标唯一

要使 $Ab^{(1)}$ 关于 $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$ 下的坐标表示为 $(1, 0, \dots, 0)$ 则只有 $(1, 0, \dots, 0) \therefore b^{(1)} = e_1 \in \mathbb{R}^n$

同理 $b^{(k)} = e_k \in \mathbb{R}^n, k=1, \dots, n. \therefore B = E_{n \times n}$.

② 当 $r < n$ 时, 列不满秩, 可看求②.

行空间的维数与象空间的维数相同:

$$\varphi_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad A_{m \times n}$$

看 $AX=0$ 对系数矩阵 A 做初等行变换

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}^* & \cdots & 0 & a_{1s+1}^* & \cdots & a_{1n}^* \\ \vdots & & a_{rs}^* & a_{rs+1}^* & \cdots & a_{rn}^* \\ 0 & & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

自由变量 $n-s$ 个: $\dim(\ker(\varphi_A)) = n-s$ $\dim(\operatorname{Im}(\varphi_A)) = n - \dim(\ker(\varphi_A)) = s$
 行秩 s 行空间维数 s

∴ 行空间维数与象空间维数相等.

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

自由变量 x_3, x_5 个数为 $5-3$. 5 是定义域维数即 $\mathbb{R}^n$ 中 $n=5$.
 3 是行秩 自由变量个数 $= \dim(\ker(\varphi_A))$

只做初等行变换, 不改变行空间, 故行空间维数是 3 .

$$\operatorname{rank}(A) = \text{行空间维数} = \dim(\operatorname{Im}(\varphi_A))$$