

① 上节课内容回顾

1. 如何求矩阵的逆

2. 矩阵分块及其应用

应用 i) 矩阵乘法分解

ii) Sylvester 秩不等式的另一种证法及其取等条件的矩阵描述

iii) Sylvester 等式

3. 线性方程组的解空间与线性流形的对应

4. 多重线性函数与斜对称线性函数

② 习题内容解答

③ 拓展内容

1. 矩阵分块更多有趣的应用

2. 交换性的第二次探索

矩阵的一些有趣的应用

① 用于证明秩不等式及其取等成立的矩阵表达式

例 51 Sylvester 不等式

$$r(AB) + r \geq r(A) + r(B)$$

与 Frobenius 秩不等式

$$r(ABC) + r(C) \geq r(AB) + r(BC)$$

取等条件分别为 $I = BX + YA \quad \exists X, Y$

$$B = BCX + YAB \quad \exists X, Y$$

pf: 第一个上节课证过

$$r(AB) + n = r \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \quad A \in R^{n \times n} \quad B \in R^{n \times s}$$

$$= r \begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 0 & -A \\ B & I_n \end{pmatrix} \geq r \begin{pmatrix} 0 & -A \\ B & 0 \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$$

$$\text{取等条件为 } r \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & 0 \\ I_n & B \end{pmatrix}$$

显然若 $I_n = BX + YA \quad X \in R^{s \times n}, Y \in R^{n \times n}$

$$\text{则 } r \begin{pmatrix} A & 0 \\ I_n & B \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & 0 \\ BX + YA & B \end{pmatrix} \rightarrow r \begin{pmatrix} A & 0 \\ BX & B \end{pmatrix} \rightarrow r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

$$\text{故 } r \begin{pmatrix} A & 0 \\ I_n & B \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

困难在于反过来 这需 2x2 分块初等变换的相抵定理

2个上三角分块矩阵若相抵

则一定可以仅通过初等上三角矩阵来互相转换 (不三角化相抵).

所以 $r \begin{pmatrix} A & 0 \\ I_n & B \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \exists P, Q$ 为 2×2 分块可逆矩阵

使得 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ I_n & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} P_{11}A & 0 \\ P_{21}A & P_{22}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} P_{11}AQ_{11} & 0 \\ P_{21}AQ_{11} + P_{22}BQ_{21} & P_{22}BQ_{22} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = P_{11}AQ_{11}$
 $P_{22}BQ_{22} = B$

$P_{21}AQ_{11} + P_{22}BQ_{21} = I_n \Rightarrow P_{21}P_{11}^T A + BQ_{22}^T Q_{21} = I_n$ (为什么 P_{11}, Q_{22} 可逆? 思考一下)

对于第2个完全同理 不再赘述.
 ② 用于求一些矩阵的逆
 ③ 例12. 修改分块矩阵 $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ 可逆, 且 A_{11} 与 $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ 可逆

试用 $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ 表达其逆.

左乘 $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -A_{21}A_{11}^{-1} \end{pmatrix}$ $\rightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}$

故 $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}^{-1}$

右乘 $\begin{pmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}$

而 $\begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -X & I \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & -Y \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$\text{从而 } \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

(Remark: 后面我们会再次讲这个例子 说明我们一定存在一种 2-分块 使得 A_{11} 可逆!)

13.13 $B = A + XRY$
 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, X \in \mathbb{R}^{n \times r}, R \in \mathbb{R}^{r \times r}, Y \in \mathbb{R}^{r \times n}$

其中 A, B, R 可逆且 $R^{-1} + Y A^{-1} X$ 也可逆

试用 A, R, X, Y 表示 B^{-1}

Compute: 注意 $A, R^{-1} + Y A^{-1} X$ 可逆可推出

$$\begin{pmatrix} A & -X \\ Y & R^{-1} \end{pmatrix} \text{ 可逆}$$

$$\text{并且 } \begin{pmatrix} A & -X \\ Y & R^{-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{右乘}} \begin{pmatrix} A + XRY & -X \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{左乘}} \begin{pmatrix} A + XRY & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix}$$

由此 B^{-1} 可利用 $\begin{pmatrix} A & -X \\ Y & R^{-1} \end{pmatrix}$ 的逆来表示

$$\begin{pmatrix} B^{-1} & \\ & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ RY & I_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -X \\ Y & R^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I_n & -RX \\ 0 & I_r \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1} = A^{-1} - A^{-1}X(R^{-1} + Y A^{-1}X)^{-1}Y A^{-1} \quad \text{这在计算 } A + XY^T \text{ 的逆时有奇效}$$

矩阵分块更多的运用会在我们学习特征值后继续用到。

② 交换性的第二次探索

之前证明了与 J_n 交换的矩阵一定是 $f(J_n)$ 这样

那么与 $\bigoplus_{i=1}^n J_{n_i}$ 交换的矩阵是什么样子的呢?

为了简单起见, 我们只讲与 $\begin{pmatrix} J_{n_1} & 0 \\ 0 & J_{n_2} \end{pmatrix}$ 交换的矩阵是什么样子的!

(其实多个与 2 个差别不大!)

$$\begin{pmatrix} J_{n_1} & 0 \\ 0 & J_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{n_1} & 0 \\ 0 & J_{n_2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J_{n_1} X_{11} = X_{11} J_{n_1}$$

由之前的结论立刻得到 $X_{11} = f_1(J_{n_1})$

$$X_{22} = f_2(J_{n_2})$$

再来看 X_{12}, X_{21} (不妨只看 X_{12} (与 X_{21} 完全同理))

$$\begin{cases} J_{n_2} X_{12} = X_{12} J_{n_2} \\ J_{n_1} X_{12} = X_{12} J_{n_1} \\ J_{n_2} X_{21} = X_{21} J_{n_1} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & X_{1n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & & & X_{1n_2} \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & X_{1n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} X_{21} & \cdots & X_{2n_2} \\ & \ddots & \\ & & X_{n_1,1} & \cdots & X_{n_1,n_2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{12} & & & \\ & \ddots & & \\ & & X_{12} & \\ & & & X_{1n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & X_{21} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \\ & & & X_{n_1,1} \end{pmatrix}$$