2. 映射方法（法一）：即证 $r(A+B)+r(AB) \le r(A)+r(B) = \cancel{r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}+r(A} \dim(Im(\varphi_A))+\dim(Im(\varphi_B)) = \dim(Im(\varphi_A)+Im(\varphi_B)) + \dim(Im(\varphi_A)\cap Im(\varphi_B))$

$r(A+B)=\dim(Im(\varphi_{A+B}))$ ∵ $A+B$ 的列向量包含于 $\{\vec{\alpha}+\vec{\beta} \mid \vec{\alpha}\in A$ 的列空间, $\vec{\beta}\in B$ 的列空间$\} = Im(\varphi_A)+Im(\varphi_B)$

∴ $Im(\varphi_{A+B}) \subseteq Im(\varphi_A)+Im(\varphi_B)$ ∴ $r(A+B) \le \dim(Im(\varphi_A)+Im(\varphi_B))$

即证 $r(AB) \le \dim(Im(\varphi_A)\cap Im(\varphi_B))$ 即 证 $\dim(Im(\varphi_{AB})) \le \dim(Im(\varphi_A)\cap Im(\varphi_B))$

已知 AB 的列是 A 的列向量的线性组合 ∴ $Im(\varphi_{AB}) \subseteq Im(\varphi_A)$

∵ $AB=BA$ ∴ BA 的列向量是 B 的列向量的线性组合 ∴ $Im(\varphi_{AB}) \subseteq Im(\varphi_B)$

∴ $Im(\varphi_{AB}) \subseteq Im(\varphi_A)\cap Im(\varphi_B)$ 得证.

法二：即证 $\dim(V_A)+\dim(V_B) \le \dim(V_{A+B})+\dim(V_{AB})$

∵ ~~$r(V_A)+r(V_B)=r(V_A\cap V_B)$~~ ∵ $\dim(V_A)+\dim(V_B)=\dim(V_A+V_B)+\dim(V_A\cap V_B)$

即证 $\dim(V_A+V_B)+\dim(V_A\cap V_B) \le \dim(V_{A+B})+\dim(V_{AB})$

$\forall\ \vec{x}+\vec{y}\in V_A+V_B$. $\vec{x}\in V_A$ $\vec{y}\in V_B$ 有 ∵ $AB(\vec{x}+\vec{y})=AB\vec{y}+BA\vec{x}=\vec{0}$ ∴ $V_A+V_B \subseteq V_{AB}$

$\forall\ \vec{x}\in V_A\cap V_B$. 有 $(A+B)\vec{x} = A\vec{x}+B\vec{x}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$ $V_A\cap V_B \subseteq V_{A+B}$

∴ $\dim(V_A+V_B) \le \dim(V_{AB})$ $\dim(V_A\cap V_B) \le \dim(V_{A+B})$

B. 法三：$\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix} \xrightarrow{l_1+l_2} \begin{pmatrix}A & B\\ 0 & B\end{pmatrix} \xrightarrow{c_1+c_2} \begin{pmatrix}A+B & B\\ B & B\end{pmatrix}$ ∴ $r\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}A+B & B\\ B & B\end{pmatrix} = r(A)+r(B)$

$\begin{pmatrix}E_n & 0\\ 0 & A+B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A+B & B\\ B & B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A+B & B\\ (A+B)B & (A+B)B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A+B & B\\ B(A+B) & AB+B^2\end{pmatrix}$ ∴ $r\begin{pmatrix}A+B & B\\ B & B\end{pmatrix} \ge r\begin{pmatrix}A+B & B\\ B(A+B) & AB+B^2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}A+B & B\\ B(A+B) & AB+B^2\end{pmatrix} \xrightarrow{l_2-Bl_1} \begin{pmatrix}A+B & B\\ 0 & AB\end{pmatrix} \left(\Leftrightarrow \begin{pmatrix}E_n & 0\\ -B & E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A+B & B\\ B(A+B) & AB+B^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A+B & B\\ 0 & AB\end{pmatrix}\right)$

∴ $r\begin{pmatrix}A+B & B\\ B(A+B) & AB+B^2\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}A+B & B\\ 0 & AB\end{pmatrix} \ge r(A+B)+r(AB)$ ∴ $r(A)+r(B) \ge r(A+B)+r(AB)$

3. (1) $\begin{pmatrix}AB & 0\\ B & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{l_1-Al_2} \begin{pmatrix}0 & 0\\ B & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{C_2+C_1A} \begin{pmatrix}0 & 0\\ B & BA\end{pmatrix}$ ∴ $r\begin{pmatrix}AB & 0\\ B & 0\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}0 & 0\\ B & BA\end{pmatrix}$

$l_1-Al_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}E_n & -A\\ 0 & E_n\end{pmatrix}=S$ $C_2+C_1A \Leftrightarrow \begin{pmatrix}E_n & A\\ 0 & E_n\end{pmatrix}=T$ $ST=\begin{pmatrix}E_n & 0\\ 0 & E_n\end{pmatrix}=TS=\begin{pmatrix}E_n & 0\\ 0 & E_n\end{pmatrix}$

∴ $T=S^{-1}$ $S\begin{pmatrix}AB & 0\\ B & 0\end{pmatrix}S^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ B & BA\end{pmatrix}$

(2) $\left(S\left[tI_{m+n}-\begin{pmatrix}AB & 0\\ B & 0\end{pmatrix}\right]S^{-1}\right)^k = S\left[tI_{m+n}-\begin{pmatrix}AB & 0\\ B & 0\end{pmatrix}\right]^2 S^{-1}\left(S\left[tI_{m+n}-\begin{pmatrix}AB & 0\\ B & 0\end{pmatrix}\right]S^{-1}\right)^{k-2}$

$= S\left[tI_{m+n}-\begin{pmatrix}AB & 0\\ B & 0\end{pmatrix}\right]^k S^{-1}$ # $= S\begin{pmatrix}tI_m-AB & 0\\ B & tI_n\end{pmatrix}^k S^{-1} = S\begin{pmatrix}(tI_m-AB)^k & 0\\ * & t^kI_n\end{pmatrix}S^{-1}$

左边 $=\left(S tI_{m+n}S^{-1}-S\begin{pmatrix}AB & 0\\ B & 0\end{pmatrix}S^{-1}\right)^k=\left(tI_{m+n}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ B & BA\end{pmatrix}\right)^k=\begin{pmatrix}tI_m & 0\\ B & tI_n-BA\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}t^kI_m & 0\\ *' & (tI_n-BA)^k\end{pmatrix}$

$\therefore r\left(S\begin{pmatrix}(tI_m-AB)^k & 0\\ * & t^kI_n\end{pmatrix}S^{-1}\right)=r\begin{pmatrix}t^kI_m & 0\\ *' & (tI_n-BA)^k\end{pmatrix}$　　S是满秩的

$\therefore r\begin{pmatrix}(tI_m-AB)^k & 0\\ * & t^kI_n\end{pmatrix}=r((tI_m-AB)^k)+n=r\begin{pmatrix}t^kI_m & 0\\ *' & (tI_n-BA)^k\end{pmatrix}=m+r((tI_n-BA)^k)$

4. (1). (2) 略

(3) 假设有 Y, s.t. $AY=YA$, $YAY=Y$, $AYA=A$, $A^{q+1}Y=A^q$

$Y=YAY=Y(AXA)Y=Y(AXA)XAY=Y(AX)^{q+1}AY=X^{q+1}A^{q+2}Y^2=X^{q+1}A^{q+1}Y=X^{q+1}A^q$

$=(XAX)X^{q-1}A^{q-1}=X^{q}A^{q-1}=\cdots=XAX=X$

法二：设 $X=S\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix}S^{-1}$　　$AX=S\begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix}S^{-1}=S\begin{pmatrix}BX_{11} & BX_{12}\\ NX_{21} & NX_{22}\end{pmatrix}S^{-1}$

$XA=S\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & N\end{pmatrix}S^{-1}=S\begin{pmatrix}X_{11}B & X_{12}N\\ X_{21}B & X_{22}N\end{pmatrix}S^{-1}$

$AX=XA$, 又$\because S$可逆的 $\therefore$　$BX_{11}=X_{11}B$　　$X_{12}N=BX_{12}$　　$X_{21}B=NX_{21}$　　$X_{22}N=NX_{22}$

(即分块矩阵中分别相等) $\because N$幂零, 设 m 使 $N^m=0$, $N^{m-1}\neq 0$

$\therefore 0=X_{12}N^m=BX_{12}N^{m-1}=B^2X_{12}N^{m-2}=\cdots=B^mX_{12}$

$\because B$可逆 $\therefore X_{12}=0$　同理 $X_{21}=0$

$\therefore X=S\begin{pmatrix}X_{11} & 0\\ 0 & X_{22}\end{pmatrix}S^{-1}$　　$XAX=X \Leftrightarrow S\begin{pmatrix}X_{11}BX_{11} & 0\\ 0 & X_{22}NX_{22}\end{pmatrix}S^{-1}=S\begin{pmatrix}X_{11} & 0\\ 0 & X_{22}\end{pmatrix}S^{-1}$

$\therefore X_{11}BX_{11}=X_{11}$　　$X_{22}NX_{22}=X_{22}$　　同理由 $AXA=A \Leftrightarrow BX_{11}B=B$　　$NX_{22}N=N$

由 $BX_{11}B=B$, 两边同乘 B^{-1} 有 $X_{11}B=E$ $\therefore X_{11}$是B^{-1}

$\therefore$ 由 $X_{22}NX_{22}=X_{22}$ 得 $X_{22}^q=(X_{22}NX_{22})^q=X_{22}^{2q}N^q=0$

$\because NX_{22}^2=X_{22}$ $\therefore NX_{22}^q=X_{22}^{q-1}=0$　次此类推 $X_{22}=0$

$\therefore X=S\begin{pmatrix}B^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}S^{-1}$ 唯一。

上节课三个思考题：1. 已知 V_A 是A的解空间，~~设有~~ V_A 的一组基 $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_k$ 令 $B=(\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_k)$ 矩阵，则 B^T 的解空间是？ $A_{m\times n}$，则 $V_A\subseteq \mathbb{R}^n$ ∴ B是n行k列的 $B\in M_{n\times k}[\mathbb{R}]$

2. 1) $V_{\binom{A}{B}}=V_A\cap V_B$；2) V_{CA},V_{CB} 分别是A,B的行空间，则设 $U=V_{CA}\cap V_{CB}$，U中的一组基是 $\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_t$，$C=\begin{pmatrix}\vec u_1\\ \vdots \\ \vec u_t\end{pmatrix}$ 是矩阵 则 $V_C=V_A+V_B$。 $A_{m\times n}$ $B_{k\times n}$

3. 已知U是 $\mathbb{R}^n$ 空间中的子空间，V与U正交，且V是 $(n-\dim(U))$ 维的，则V唯一吗？

1. 由已知条件知 $A\vec v_1=A\vec v_2=\cdots=A\vec v_k=\vec 0$ 将A写作行向量的形式 $A=\begin{pmatrix}\vec A_1\\ \vdots\\ \vec A_m\end{pmatrix}$ 则

$A\vec v_i = \begin{pmatrix}\vec A_1\vec v_i\\ \vdots\\ \vec A_m \vec v_i\end{pmatrix}=\left.\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\right\}m个 \quad i=1,\cdots,k$ ∴ $\vec v_i^T A^T=(\vec v_i^T\vec A_1^T,\cdots,\vec v_i^T\vec A_m^T)=(\overbrace{0,\cdots,0}^{m个})$

$B^T=\begin{pmatrix}\vec v_1^T\\ \vdots\\ \vec v_k^T\end{pmatrix}_{k\times n}$ 检查 $B^T\vec A_j^T$ $j=1,\cdots m$ $B^T\vec A_j^T=\begin{pmatrix}\vec v_1^T\vec A_j^T\\ \vec v_2^T\vec A_j^T\\ \vdots \\ \vec v_k^T\vec A_j^T\end{pmatrix}=\left.\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\right\}n个$

∴ $\vec A_j^T\in V_{B^T}$ 又∵ $\{\vec A_j^T \mid j=1,\cdots m\}$ 的极大线性无关组个数为 $r(A)$，而 $\dim(V_{B^T})=n-\dim(\varphi_{B^T})$
$=n-r(B^T)=n-k$

$\dim(\varphi_A)=r(A)=n-\dim(V_A)=n-k$ ∴ $V_{B^T}=\langle\{\vec A_j^T \mid j=1,\cdots m\}\rangle$ 即 $AB=O_{m\times k}$ ∴ $B^TA^T=O_{k\times m}$

2. 2) ~~$\forall\vec z\in V_C$ 有 $\vec u_1^T\vec z=0,\vec u_2^T\vec z=0,\cdots \vec u_t^T\vec z=0$ 又∵ $\vec u_i$, $i=1\cdots t\in V_{CA}\cap V_{CB}$ ∴~~

~~$\vec u_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\vec A^{(j)}=\sum_{j=1}^n\beta_{ij}\vec B^{(j)}$~~ 设 $C=(\vec C^{(1)}\cdots \vec C^{(p)})$，$D=(\vec D^{(1)},\cdots \vec D^{(q)})$ 其中 $\vec C^{(i)}$ 是 V_A 的组基，$\vec D^{(j)}$ 是 V_B 的一组基 由思考题1.知 C^T 的解空间是 A^T 的列空间，即A的行空间，D^T 的解空间是 B^T 的列空间即B的行空间 由 $V_{\binom{A}{B}}=V_A\cap V_B$ 得 $V_{\binom{C^T}{D^T}}=V_{C^T}\cap V_{D^T}$

∴即 $V_{\binom{C^T}{D^T}}=V_{CA}\cap V_{CB}=U$ ∴ $V_C=\left(\frac{C^T}{D^T}\right)$ 的行空间 $=(C\,\vdots\,D)$ 的列空间 $=V_A+V_B$

3. 设 $U=\langle\vec u_1,\cdots\vec u_k\rangle$，$\vec u_1,\cdots \vec u_k$ 是U的一组基，不妨设 V是与U正交的空间，且维数为 $n-k$

设 $\vec\alpha$ 与U正交 若 $\vec\alpha\notin V$，令 $V^*=V+\langle\vec\alpha\rangle$ 是 $n-k+1$ 维的，~~令 $A=(\vec u_1,\cdots \vec u_k)$ 则 $U=\mathrm{Im}(\varphi_A)$~~

令 $A=\begin{pmatrix}\vec u_1^T\\ \vdots\\ \vec u_k^T\end{pmatrix}$ 则 $V^*\subseteq V_A$ ∴ $\dim(V^*)\le\dim(V_A)=n-k$ 矛盾 ∴ $\vec\alpha\in V$，故∀与U正交的

子空间 V^* 包含于V，若 V^* 维数与V的维数相同，则 $V^*=V$，正交空间唯一。

已知$A_{m\times n}$求左逆和右逆?

1) 假设A列满秩，单射，有左逆，求A^*，使$A^*A=E_{n\times n}$ ① 当$A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}\begin{matrix}\}n行\\\}m-n行\end{matrix}$ A_1是列满秩时

A可通过初等列变换变成 $AQ_{n\times n}=\begin{pmatrix}E_n\\A'\end{pmatrix}\begin{matrix}\}n行\\\}m-n行\end{matrix}$

$\therefore A=\begin{pmatrix}E_n\\A'\end{pmatrix}Q^{-1}_{n\times n}$ 令$A^*=Q(E_n, 0)$ $=(Q, 0)$ 则 $A^*A=Q(E_n\ 0)\begin{pmatrix}E_n\\A'\end{pmatrix}Q^{-1}_{n\times n}=QE_nQ^{-1}=E_n$

$\begin{pmatrix}A\\ \hline E_n\end{pmatrix}\xrightarrow{初等列变换}\begin{pmatrix}E_n\\A'\\ \hline Q\end{pmatrix}$；$\begin{pmatrix}Q\\ \hline E_n\end{pmatrix}\xrightarrow[变换]{初等列}\begin{pmatrix}E_n\\ \hline Q^{-1}\end{pmatrix}$ 若$A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}\begin{matrix}\}n行\\\}m-n行\end{matrix}$ 则$Q^{-1}=A_1$，$Q=A_1^{-1}$

② 当A_1不是列满秩时，A可通过初等行列变换变成 $P_{r\times r}AQ_{n\times n}=\begin{pmatrix}E_n\\A'\end{pmatrix}\begin{matrix}\}n行\\\}m-n行\end{matrix}$

$\therefore A=P^{-1}_{m\times m}\begin{pmatrix}E_n\\A'\end{pmatrix}Q^{-1}$ 令$A^*=Q(E_n, 0)P=Q(E_n\ 0)\begin{pmatrix}P_{1\,n\times n} & P_{2\,n\times(m-n)}\\P_{3\,(m-n)\times n} & P_{4\,(m-n)\times(m-n)}\end{pmatrix}=(QP_1\ \ QP_2)$

$A^*A=Q(E_n\,0)PP^{-1}\begin{pmatrix}E_n\\A'\end{pmatrix}Q^{-1}=Q(E_n\,0)\begin{pmatrix}E_n\\A'\end{pmatrix}Q^{-1}=E_n$

P只是一些行的互换的初等变换，即I类初等行变换 ∴

2) 假设A行满秩，满射，有右逆? 思考题

~~$A_{m\times n}$的广义逆$X_{n\times m}$~~ 线性方程组求解：$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow A\vec{x}=\vec{b}$

若A满秩，解为 $x_1=\dfrac{\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}}$ $x_2=\dfrac{\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & b_2 & & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{n1} & b_n & & a_{nn}\end{vmatrix}}{|A|}$ $\cdots$ $x_n=\dfrac{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1\\a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n\end{vmatrix}}{|A|}$

(即将A的第i列换成$\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$，再求行列式，再除A的行列式) why?

先证 $\begin{pmatrix}A & 0\\0 & D\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1} & 0\\0 & D^{-1}\end{pmatrix}$