第九次习题课讲义

① 上课内容回顾

1、行列式的定义及基本性质

2、行列式计算方法(I) ① 化为上三角阶梯型

② 按行或列展开

③ 递归法

3、行列式进一步性质 ① $\det(AB)=\det(A)\det(B)$

$=\det(BA)$

② $\det\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}=\det(A)\det(B)$

③ $\det(A)=\det(A^T)$

4、伴随矩阵定义及基本性质

② 习题解答

③ 1、广义逆初探

2、由分块矩阵得到的行列式计算方法

3、* 不变子空间初探

拓展内容

① 广义逆初探

定义：对于方阵 $A \in M_n(R)$

我们称 X 为 A 的广义逆若 $AXA = A$

首先 X 一定存在　设 $r(A) = r$

则 $A = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$　P, Q 可逆

则 $AXA = A \Rightarrow X = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & B \\ C & D \end{pmatrix}P^{-1}$

B, C, D 为任意矩阵.

我们常用 A^- 表示 A 的任意一个广义逆

习题中我们借助 Jordan 分解得到了在特定情形下的 $\{1^k, 2, 5\}$-广义逆矩阵

也说明了它的唯一性且在 A 的幂零部分恰为 0 时，这种矩阵就是它的某一种广义逆矩阵

我们先对 Drazin 逆做一点几何上的补充

对于方阵 $A \in M_n(R)$　有线性映射 $\varphi: R^n \to R^n$ 在标准基下矩阵表示为 A

显然 $\ker\varphi \subset \ker\varphi^2 \subset \cdots \subset$

$\operatorname{Im}\varphi \supset \operatorname{Im}\varphi^2 \supset \cdots$

并且 $\dim\ker\varphi^i + \dim\operatorname{Im}\varphi^i = n$　$\forall i$

考察 $\operatorname{Im}\varphi^i \cap \ker\varphi^i = V_i$　我们说明在 i 充分大时 $V_i = 0$（以后会说明 $V_i = 0$ 的最小 i 即为 A 的幂零指数）

事实上 $x \in \operatorname{Im}\varphi^i \cap \ker\varphi^i$　记 $x = \varphi^i y$　则 $\varphi^{2i} y = 0$

$\Rightarrow x \in \operatorname{Im}(\varphi^i|_{\ker\varphi^{2i}})$　反之亦然　故 $V_i = \operatorname{Im}(\varphi^i|_{\ker\varphi^{2i}})$

由于存在 k 使得 $\ker\varphi^i = \ker\varphi^{i+1}$　$\forall i \geq k$　从而对这些 i　$\operatorname{Im}(\varphi^i|_{\ker\varphi^{2i}}) = \operatorname{Im}(\varphi^i|_{\ker\varphi^i}) = 0$

$\operatorname{Im}\varphi^i = \operatorname{Im}\varphi^{i+1}$

从而 $V_i = 0$　$\forall i \geq k$

这说明 在i充分大时 $\operatorname{Ker}\varphi^i \oplus \operatorname{Im}\varphi^i = R^n$. 并且 φ 在 $\operatorname{Im}\varphi^i$ 上为同构

那么我们定义 $\psi: R^n \longrightarrow R^n$

$$\psi u = \begin{cases} \varphi|_{\operatorname{Im}\varphi^i}^{-1} u & 若\ u \in \operatorname{Im}\varphi^i \\ 0 & 若\ u \in \operatorname{Ker}\varphi^i \end{cases}$$

再延拓得到 $R^n \longrightarrow R^n$ 的线性映射

我们可以发现 ψ 在标准基下的矩阵即为我们题目中的 X, 即 A 的 Drazin 逆

再回到广义逆

由于 A 可逆的时候 $Ax=\beta$ 的解可写为 $A^{-1}\beta$ 存在且唯一

我们也想 若 $Ax=\beta$ 有解的时候 其解是否也能写为和广义逆相关的式子呢?

答案是肯定的!

Thm 1. 若 $Ax=\beta$ 有解 则通解 $X = A^{-}\beta$ 即任取 A 的一个广义逆 A^{-}, $A^{-}\beta$ 均为 $Ax=\beta$ 的解

pf: 首先 $AA^{-}\beta = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q\, Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & B \\ C & D \end{pmatrix} P^{-1}\beta$

$$= P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}\beta$$

注意到 $\beta = Ax$ 有解 任取解 x_0 则 $\beta = Ax_0 = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x_0$ 代入得到 $AA^{-}\beta = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x_0 = \beta$

反过来 设 Y 为 $Ax=\beta$ 的一个解

$$P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} QY = \beta \iff \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} QY = P^{-1}\beta$$

设 $QY = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ $P^{-1}\beta = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow Y_1 = z_1$ 和 $z_2 = 0$ 从而 $Y = Q^{-1}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = Q^{-1}\begin{pmatrix} z_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & B \\ C & D \end{pmatrix} P^{-1}\beta$

(其中 $\begin{pmatrix} I_r & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ 取 C 使得 $Cz_1 = Y_2$ 即可)

而对于齐次方程组 $AX=0$

任取列向量 Z $\quad A(X+Z)=AZ$

由 Thm1 可知 $X+Z=A^-AZ \quad \exists A^-$

$\Rightarrow X=(I_n-A^-A)(-Z)$

反过来 $A(I_n-A^-A)Z=(A-AA^-A)Z=0$

由此可知 $AX=0$ 的通解为 $(I_n-A^-A)Z$ $\quad$ 或者 $(I_n-A^-A)Z$

A^- 给定广义逆，Z 为任意列向量 $\quad$ A^- 任取广义逆 Z 为给定列向量

两者结合 得到更准确的非齐次方程组解的结构

Thm2: 若 $AX=\beta$ 有解 则通解为 $X=A^-\beta+(I_n-A^-A)Z$

A^- 为给定广义逆，Z 为任意列向量

义逆除了表达线性方程组的解的结构，对矩阵方程通解的表达以及解的存在性均有判定的方式

Thm3 (Thm1,2 的矩阵方程版本)
设 A,X,B 为 n 阶方阵
若 $AX=B$ 有解 则解为 $X=A^-B$ 更准确地 $X=A^-B+(I_n-A^-A)W$

A^- 为任意广义逆 $\quad$ A^- 为给定广义逆，W 为任意 n 阶方阵

Thm4 若 $AX-YB=C$ 有解

则解为 $X=A^-C+A^-ZB+(I_n-A^-A)W$

$Y=-(I_n-AA^-)CB^-+Z-(I_n-AA^-)ZBB^-$

A^-,B^- 为给定广义逆，Z,W 为任意方阵

Thm5 若 $AXB=C$ 有解

则解为 $X = A^-CB^- + (I_n - A^-A)Y + Z(I_n - BB^-)$

$+ (I_n - A^-A)W(I_n - BB^-)$

A^-, B^- 为给定广义逆，Y, Z, W 为任意矩阵.

之前利用上三角可逆矩阵可写为上三角的初等矩阵乘积

来证明了 $r(ABC) + r(B) \geq r(BC) + r(AB)$

$r(BA) + n \geq r(A) + r(B)$

的取等条件分别为 $B = BCX + YAB$

$I_n = AX + YB$

这里利用广义逆来给出一个证明：

$r(BA) + n = r\begin{pmatrix} A & I \\ 0 & B \end{pmatrix} \geq r(A) + r(B) = r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$

而 $r\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B) + r((I_n - AA^-)C(I_n - B^-B))$ 且 A^-, B^- 为广义逆

因为 $A = P_1\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q_1$ $B = P_2\begin{pmatrix} I_t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q_2$ 取 $A^- = Q_1^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ H_1 & D_1 \end{pmatrix}P_1^{-1}$ $B^- = Q_2^{-1}\begin{pmatrix} I_t & G_2 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}P_2^{-1}$

$(I_n - AA^-)C(I_n - B^-B) = P_1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}P_1^{-1}CQ_2^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-t} \end{pmatrix}Q_2$

设 $P_1^{-1}CQ_2^{-1} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$ 则 $\doteq P_1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_4 \end{pmatrix}Q_2$ 从而此时 $r((I_n - AA^-)C(I_n - B^-B)) = r(C_4)$

而 $r\left(\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}\right) = r\left(\begin{pmatrix} P_1^{-1} & \\ & P_2^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1^{-1} & 0 \\ 0 & Q_2^{-1} \end{pmatrix}\right) = r\begin{pmatrix} I_r & 0 & C_1 & C_2 \\ 0 & 0 & C_3 & C_4 \\ 0 & 0 & I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = r + t + r(C_4)$

故取这样的 A^-, B^- 可保证等式成立

从而等号取等 $\Leftrightarrow$ ~~存在~~ $\exists A^-, B^-$ 广义逆 ~~使得~~ 使得 $r((I_n - AA^-)(I_n - B^-B)) = 0$

我们证明这与存在 X, Y 使得 $I_n = AX + YB$ 等价

若 $BX + YA = I_n$ 有解

则 $(I_n - AA^-)(I_n - B^-B)$

$= (I_n - AA^-)(AX + YB)(I_n - B^-B)$

$= (AX + YB - AA^-AX - AA^-YB)(I_n - B^-B)$

$= (YB - AA^-YB)(I_n - B^-B)$

$= 0$ （因为 $B(I_n - B^-B) = 0$）

反之 若 $(I_n - AA^-)(I_n - B^-B) = 0$

则 $I_n = AA^- + B^-B - AA^-B^-B$

$= AA^- + (B^- - AA^-B^-)B$

取 $X = A^-$，$Y = B^- - AA^-B^-$ 即可

) 用分块矩阵来计算行列式

有时有些矩阵可写为 $A + XY^T$ $A \in M_n(\mathbb{R})$ $X \in \mathbb{R}^{n\times r}$ $Y \in \mathbb{R}^{n\times r}$ 且 A 可逆

这时候的 $\det(A + XY^T)$ 该如何求呢？

方法是利用上节课的 $\begin{pmatrix} A & -X \\ Y^T & I_r \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{pmatrix} I_n & X \\ 0 & I_r \end{pmatrix}]{\text{左乘}} \begin{pmatrix} A+XY^T & 0 \\ Y^T & I_r \end{pmatrix}$

从而 $\det\begin{pmatrix} A & -X \\ Y^T & I_r \end{pmatrix} = \det(A + XY^T)$

另一方面 由 A 可逆 $\begin{pmatrix} A & -X \\ Y^T & I_r \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{pmatrix} I_n & A^{-1}X \\ 0 & I_r \end{pmatrix}]{\text{右乘}} \begin{pmatrix} A & 0 \\ Y^T & I_r + Y^TA^{-1}X \end{pmatrix} \Rightarrow \det\begin{pmatrix} A & -X \\ Y^T & I_r \end{pmatrix}$

$= \det A \det(I_r + Y^TA^{-1}X) = \det(A + XY^T)$

例子1.

$$\begin{vmatrix} 0 & 2a_1 & 3a_1 & \cdots & na_1 \\ a_2 & a_2 & 3a_2 & \cdots & na_2 \\ \vdots & & & & \\ a_n & 2a_n & 3a_n & \cdots & (n-1)a_n \end{vmatrix}$$

其中 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$ (若为0 行列式的值为0)

$$= \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (1\ 2\ 3 \cdots n) - \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \right|$$

代入 $A = -\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$

则 $\det(A + XY^T)$

$= \det A \det(1 + Y^T A^{-1} X)$

$= a_1 \cdots a_n \left(1 + (1\ 2\ 3 \cdots n) \begin{pmatrix} -a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & -a_n^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right)$

$= (-1)^n a_1 \cdots a_n \left(1 - \frac{n(n+1)}{2}\right)$