第十次习题课讲义

① 上课内容回顾

1) 伴随矩阵的性质 $|A^{\vee}| = |A|^{n-1}$

$A^{\vee}A = AA^{\vee} = |A|E$

2) Cramer 法则

3) 行列式与矩阵秩的关系

4) R^n 中的一维子空间以及一维线性子流形

和 $n-1$ 维子空间以及 $n-1$ 维线性子流形的对应关系

② 习题解答

③ 拓展内容

1) Schur补和分块矩阵行列式计算

2) Cauchy－Binet公式

3)* Laplace展开介绍

4)* Cauchy矩阵的行列式计算

1) Schur补 和 分块矩阵行列式计算

之前说过 $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ 可逆，A_{11}可逆时 行列式 如何求

但在实际计算中 主对角分块 不一定 有可逆的存在（除了整个矩阵）

所以我们需要引入 Schur补来推广上述行列式的计算

我们知道 A可逆，那么一定存在某k行 线性无关 不妨设为 $n_1, \dots n_k$行线性无关

那么子式 $A\begin{pmatrix} n_1 \cdots n_k \\ n_1 \cdots n_k \end{pmatrix} \neq 0$ 这说明子矩阵 $A\begin{bmatrix} n_1 \cdots n_k \\ n_1 \cdots n_k \end{bmatrix}$ 可逆

然后我们就可以模仿之前的分块，只不过现在是对 $\{n_1, \dots n_k\}$, $\{1,2,\dots n\} \setminus \{n_1, \dots n_k\}$ 进行分块

即 $A_{11} = A\begin{bmatrix} n_1 \cdots n_k \\ n_1 \cdots n_k \end{bmatrix}$ $\qquad A_{21} = \begin{bmatrix} 123\cdots n \text{去掉} n_1 \cdots n_k \\ n_1 \cdots n_k \end{bmatrix}$

$A_{12} = A\begin{bmatrix} n_1 \cdots n_k \\ 1,2,\cdots n \text{去掉} n_1 \cdots n_k \end{bmatrix}$ $\qquad A_{22} = \begin{bmatrix} 123\cdots n \text{去掉} n_1 \cdots n_k \\ 123\cdots n \text{去掉} n_1 \cdots n_k \end{bmatrix}$

再由之前的方法 可以猜测 ~~A~~ 此时 det(A)

$$= \det(A_{11}) \det(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})$$

为什么对呢？

因为之前通过分块初等变换 现在依然可以（只不过不是相邻几行一起操作 而是对指定n行，n列操作）

为了严格说明这一点，我们引入 Schur补

设 $\alpha = \{n_1, \cdots n_k\}$ 为$\{1,2,\cdots n\}$的子集 $\quad A[\alpha] = A\begin{bmatrix} n_1 \cdots n_k \\ n_1 \cdots n_k \end{bmatrix}$ 代表A取 $n_1 \cdots n_k$ 行与列后的子矩阵

$A[\alpha, \alpha^c] = A$ 取 $n_1, \cdots n_k$ 行与 $1,2,3 \cdots n$ 去掉 $n_1, \cdots n_k$ 列的子矩阵

那么我们称 $A[\alpha]$ 在 A 中的 Schur补 为 $A[\alpha^c] - A[\alpha^c, \alpha] A[\alpha]^{-1} A[\alpha, \alpha^c]$

然后利用schur补的关键性质：

property：任何对A进行的初等变换 若不改变$A[\alpha]$的元素 那么其Schur补的行列式就会随着初等变换对原矩阵行列式的影响等同变化

特别地 对A进行某行(列)乘以λ+另一行(列)这种初等变换后，Schur补的行列式不变.

从而我们就可以证明 $\det A = \det A[\alpha]\cdot\det \underbrace{A/A[\alpha]}_{A[\alpha]\text{在}A\text{中的Schur补}}$ （利用行列式函数的唯一性）

$$= \det A[\alpha]\ \det\left(A[\alpha^c] - A[\alpha^c,\alpha]A[\alpha]^{-1}A[\alpha,\alpha^c]\right)$$

而且利用Schur补甚至可以得到 $A[\alpha]$不可逆时候

$\det A$ 的算法 $= \det A[\alpha]A[\alpha^c] - A[\alpha^c,\alpha](A[\alpha])^{\vee}A[\alpha,\alpha^c]$ （对于任意α为$\{1,2,\dots n\}$子集均成立）

证明方法就是这周作业的思考题！

Schur补还有一个有趣的应用

若$|\alpha| = \frac{n}{2}$ 那么 $\det A = \det A[\alpha]\det A/A[\alpha]$

如果这时 $A[\alpha]$与$A[\alpha^c,\alpha]$或$A[\alpha,\alpha^c]$交换的话

$$= \det A[\alpha]\cdot(A/A[\alpha])$$

$$= \det\left(A[\alpha]A[\alpha^c] - A[\alpha]A[\alpha^c,\alpha]A[\alpha]^{-1}A[\alpha,\alpha^c]\right)$$

$$= \det\left(A[\alpha]A[\alpha^c] - A[\alpha^c,\alpha]A[\alpha,\alpha^c]\right)$$

再利用连续性 可说明$A[\alpha]$不可逆时亦成立 只需要 $A[\alpha]$与$A[\alpha^c,\alpha]$或$A[\alpha,\alpha^c]$交换

即 Thm：$\left|\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\right| = |A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}|$ 若 A_{11}与A_{12}或A_{21}交换

$= |A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}|$ 若 A_{22}与A_{12}或A_{21}交换

2) Cauchy - Binet公式介绍

对于 $A \in R^{n\times n}$

类比伴随矩阵 我们把 A 的所有r阶子式排成一个 $\binom{m}{r} \times \binom{n}{r}$ 阶矩阵（按字典序）

称为 A 的r阶合成矩阵 $C_r(A)$

显然 $m=n$时 $C_{n-1}(A) = A^{\vee}$

$C_n(A) = |A|$

$C_1(A) = A$

而Cauchy - Binet 公式 即为 $C_r(AB) = C_r(A)\,C_r(B)$

$\forall A \in R^{m\times k} \quad B \in R^{k\times n}, \quad r \leq \min\{n,k,m\}$

具体写开 即为 $AB\begin{pmatrix} n_1 \cdots n_r \\ m_1 \cdots m_r \end{pmatrix} = \sum\limits_{\substack{\{l_1,\cdots l_r\} \\ 为\{1,2,\cdots k\}的子集}} A\begin{pmatrix} n_1 \cdots n_r \\ l_1 \cdots l_r \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} l_1 \cdots l_r \\ m_1 \cdots m_r \end{pmatrix}$

这对于我们求乘积的子式有很大的帮助

3) Laplace 展开介绍

按任意k行展开是我们按某一行展开计算行列式的推广

Thm：（Laplace 定理）

取定 $\{n_1,\cdots n_k\} \subseteq \{1,2,\cdots n\} \quad A \in M_n(K)$

则 $|A| = \sum\limits_{\substack{\{i_1,\cdots i_k\} \\ \subseteq\{1,2,\cdots n\} 且 i_1<i_2<\cdots<i_k}} A\begin{pmatrix} n_1,\cdots n_k \\ i_1 \cdots i_k \end{pmatrix} (-1)^{i_1+\cdots i_k+n_1+\cdots+n_k} \underbrace{A\begin{pmatrix} n_1',\cdots, n_k' \\ i_1' \cdots i_k' \end{pmatrix}}_{为 A\begin{pmatrix} n_1 \cdots n_k \\ i_1 \cdots i_k \end{pmatrix} 对应的余子式}$

或者写为 $|A| = \sum\limits_{\gamma} A[\alpha,\gamma] (-1)^{\tau(\alpha)+\tau(\gamma)} A[\alpha^c,\gamma^c]$

例5 计算

$$\begin{array}{c} \\ 2n \end{array}\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}^{\,2n}$$

按1与2n行展开 除了 $A\begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 1 & 2n \end{pmatrix}$ 其余均为0

故 $|A_n| = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} (-1)^{(2n+1)\times 2} \tilde{A}_{2n-2}$

$= (a^2-b^2) A_{2n-2}$

$= \cdots = (a^2-b^2)^n$

4) Cauchy 矩阵的行列式计算

对 $A=(a_{ij})$ $a_{ij}=(a_i+b_j)^k$ 这样子的矩阵的行列式的计算一直都是一个问题

$k=1$ 时 我们都非常清楚，但 $k\geq 2$ 技巧就很复杂

今天我们来谈如何求 $k=-1$ 时的计算

$$\left|\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & & & \\ \vdots & & & \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & & \frac{1}{a_n+b_n} \end{pmatrix}\right| = ?$$

首先 第一行乘以 $(a_1+b_1)\cdots(a_1+b_n)$

第二行乘以 $(a_2+b_1)\cdots(a_2+b_n)$

$\vdots$

第 n 行乘以 $(a_n+b_1)\cdots(a_n+b_n)$

我们得到矩阵 B 其行列式为关于 $a_1,\cdots a_n,b_1,\cdots b_n$ 的至多 $(n-1)n$ 齐次多项式

这时我们将 a_1 设为未知元 那么 $|B|$ 成为了关于 a_1 的至多 n 次多项式

代入 $a_1=a_2,a_3,\cdots a_n$ 我们发现 $|B|=0$

这说明 $|B|$ 关于 a_1 的至多 $n-1$ 次多项式含有 $(a_1-a_2)\cdots(a_1-a_n)$ 项

而这些项乘起来恰为 $n-1$ 次 故 $|B|=\lambda(a_1-a_2)\cdots(a_1-a_n)$

同理 $|B|=\lambda_2(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)\cdots(a_2-a_n)$

$=\lambda_3(a_3-a_1)(a_3-a_2)\cdots(a_3-a_n)$

$\vdots$

$=\lambda_n(a_n-a_1)\cdots(a_n-a_{n-1})$

$=\lambda_1'(b_1-b_2)\cdots(b_1-b_n)$ 其中 λ_i 为不含 a_i 的多元多项式

$\vdots$ λ_i' 为不含 b_i 的多元多项式

$=\lambda_n'(b_n-b_1)\cdots(b_n-b_{n-1})$

而 $\prod_{i\neq j}(a_i-a_j)(b_i-b_j)$ 恰好为 $(n-1)n$ 次多元多项式

从而 $|B|=\lambda\prod_{i\neq j}(a_i-a_j)(b_i-b_j)$ λ 为常数 代入简单的计算可得 $\lambda=1$

从而 $|A|=\dfrac{|B|}{\prod_{1\le i,j\le n}(a_i+b_j)}=\dfrac{\prod_{i\neq j}(a_i-a_j)(b_i-b_j)}{\prod_{1\le i,j\le n}(a_i+b_j)}$