1. (1) $a=2$ 时 有解，不唯一，有无穷解

(2) $\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1-ab & 1-a & 2-a \end{pmatrix} \to \begin{cases} b=0 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-a & 2-a \end{pmatrix} \text{有解无穷} \\ b\neq 0 & \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 2-a \end{pmatrix} \begin{matrix} a=1 \text{ 无解} \\ a\neq 1 \text{ 有唯一解} \end{matrix} \end{cases}$

法二：$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{vmatrix} = ab+2b+1-(ab+b+1) = b-ab = b(1-a)$

当 $\det=0$ 时，不可逆 即 $b=0$ ~~且 $a=1$~~ 或 $a=1$　　$b=0$ 时 有无穷解

$a=1$ 时 无解.

当 $\det\neq 0$ 时，即 $b\neq 0$ 且 $a\neq 1$ 时　可逆　$Ax=b$　$x=A^{-1}b$ 有唯一解.

2. (1) 当 A 可逆时，$A^{\wedge}=|A|^{n-1}\cdot A^{-1}$. $A^{\wedge}$ 的秩为 n

(2) 当 $r(A)\leq n-2$ 时，任何 A 的 $n-1$ 阶子式都为零（定理3.3）$\therefore$ $A^{\wedge}$ 中每一个元素为零 $\therefore A^{\wedge}=O_{n\times n}$ $r(A^{\wedge})=0$

(3) 当 $r(A)=n-1$ 时，$\because AA^{\wedge}=|A|E_{n\times n}=0$ $\therefore$ $0\geq r(A)+r(A^{\wedge})-n$　$\therefore r(A^{\wedge})\leq 1$

若 $r(A^{\wedge})=0$　由定理3.3 $r(A)\leq n-2$ 矛盾 $\therefore r(A^{\wedge})\neq 0$　$\therefore r(A^{\wedge})=1$

3. 取 A 的列向量的极大线性无关组 $\vec{A^{i_1}},\cdots,\vec{A^{i_r}}$　　$r(A)=r$

$\because A^T=-A$ 故 A 的行向组 $\vec{A_{i_1}},\cdots\vec{A_{i_r}}$ 也是线性无关的

从而 $A\begin{pmatrix} i_1\cdots i_r \\ i_1\cdots i_r \end{pmatrix}\neq 0$ 且满秩

$A\begin{pmatrix} i_1\cdots i_r \\ i_1\cdots i_r \end{pmatrix}$ 也是反对称的（在对角线上的子阵） 故 $\left|-A\begin{pmatrix} i_1\cdots i_r \\ i_1\cdots i_r \end{pmatrix}\right|=(-1)^r\left|A\begin{pmatrix} i_1\cdots i_r \\ i_1\cdots i_r \end{pmatrix}\right|$

$=\left|A\begin{pmatrix} i_1\cdots i_r \\ i_1\cdots i_r \end{pmatrix}^T\right|=\left|A\begin{pmatrix} i_1\cdots i_r \\ i_1\cdots i_r \end{pmatrix}\right|$　$\therefore (-1)^r=1$　$\therefore r$ 是偶数.

4. 定义 $f(t)_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11}-t & a_{12}-t & \cdots & a_{1n}-t \\ a_{21}-t & a_{22}-t & \cdots & a_{2n}-t \\ \vdots & & & \\ a_{n1}-t & a_{n2}-t & \cdots & a_{nn}-t \end{vmatrix}$ 的 i 行 j 列位置的 $n-1$ 阶子式，是关于 t 的多项式函数 是连续的.

$\therefore$ 当 $t\to 0$　$A'=\begin{pmatrix} a_{11}-t & a_{12}-t & \cdots & a_{1n}-t \\ a_{21}-t & a_{22}-t & \cdots & a_{2n}-t \\ \vdots & & & \\ a_{n1}-t & a_{n2}-t & \cdots & a_{nn}-t \end{pmatrix}\to A$，$A'$ 的 A_{ij} 子式 $=f(t)_{ij}\to A_{ij}$ $(t\to 0)$

$\therefore A'^{\wedge}\to A^{\wedge}$　$(t\to 0)$

(1) 当A.B可逆时, ~~AB~~ $A^{-1}=A^{*}\frac{1}{|A|^{n-1}}$ $B^{-1}=B^{*}\frac{1}{|B|^{n-1}}$ $\therefore (AB)^{\vee}=|AB|^{n-1}(AB)^{-1}=B^{-1}|B|^{n-1}A^{-1}|A|^{n-1}$
$=B^{\vee}A^{*}$

$\therefore \cancel{(AB)^{\vee}=(AB)^{-1}\frac{1}{|AB|^{n-1}}=B^{-1}\frac{1}{|B|^{n-1}}\times A^{-1}\frac{1}{|A|^{n-1}}=B}$

令$g(t)=\det(A')$是关于t的多项式函数且最高次是n阶,若令$g(t)=0$的根只有最多n个,也就是说在R中去除这n个值的t的取值都使$g(t)\neq 0$.即A'可逆.即设$t_1\cdots t_n$是n个根.当$t\to t_1$,$A'\to A$,A'可逆

$(A'B')^{\vee}=|A'B'|^{n-1}(A'B')^{-1}=(B')^{-1}|B'|^{n-1}|A'|^{-1}|A'|^{n-1}=B'^{\vee}A'^{\vee}\longrightarrow B^{\vee}A^{\vee}=(AB)^{\vee}$

(2). 若A可逆, $A^{\vee}=|A|^{n-1}A^{-1}$ $\therefore$ $AA^{\vee}B=|A|^{n}E_nB=B|A|^{n}E_n=BAA^{\vee}=ABA^{\vee}$

$\therefore$ 两同乘A^{-1}在左边 有$A^{\vee}B=BA^{\vee}$

当A不可逆 与(1)同理 $A'^{\vee}B=BA'^{\vee}\longrightarrow A^{\vee}B=BA^{\vee}$ $(t\to 0)$

(3) 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$ A_{ij}是A的去除第i行第j列行列式. $\therefore A_{ij}$对应A^{T}去除第j行第i列的行列式

$\therefore$ A^{*}的第j列第i行位置的元素A_{ij}是$(A^{T})^{\vee}$的第i行第j列 $\therefore (A^{\vee})^{T}=(A^{T})^{\vee}$

(4) 记$A_n\to A$

~~当A可逆时~~ $\cancel{\det(A+xy^{T})=\det(A(E+A^{-1}xy^{T}))=\det(A)\det(E+A^{-1}xy^{T})}$

$\cancel{=\det A\det(E+y((A^{-1})^{T}x)^{T})=\det A\det}$

现证 $\det(E+yx^{T})=1+x^{T}y$

归纳法 $n=2$时 $E+yx^{T}=\begin{pmatrix}1+y_1x_1 & y_1x_2\\ y_2x_1 & y_2x_2+1\end{pmatrix}=(y_1x_1+1)(y_2x_2+1)-y_1x_2y_2x_1=x_1y_1+x_2y_2+1=1+x^{T}y$

假设当$n=k-1$时 $\det(E_n+yx^{T})=1+x^{T}y$

当$n=k$时

$$\det(E_k+yx^{T})=\det\begin{pmatrix}x_1y_1+1 & x_2y_1\cdots & x_ky_1\\ x_1y_2 & & \\ \vdots & E_{k-1}+\begin{pmatrix}y_2\\ \vdots\\ y_k\end{pmatrix}(x_2\cdots x_k) & \\ x_1y_k & & \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}x_1y_1 & x_2y_1\cdots & x_ky_1\\ x_1y_2 & & \\ \vdots & E_{k-1}+\begin{pmatrix}y_2\\ \vdots\\ y_k\end{pmatrix}(x_2\cdots x_k) & \\ x_1y_k & & \end{pmatrix}$$

$$+\det\begin{pmatrix}1 & x_2y_1\cdots & x_ky_1\\ x_1y_2 & & \\ \vdots & E_{k-1}+\begin{pmatrix}y_2\\ \vdots\\ y_k\end{pmatrix}(x_2\cdots x_k) & \\ x_1y_k & & \end{pmatrix}$$

$$=x_1y_1\det\begin{pmatrix}1 & x_2\cdots x_k\\ 0 & \\ \vdots & E_{k-1}+\begin{pmatrix}y_2\\ \vdots\\ y_k\end{pmatrix}(x_2\cdots x_k)\\ 0 & \end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}1 & y_1(x_2\cdots x_k)\\ \begin{pmatrix}y_2\\ \vdots\\ y_k\end{pmatrix}x_1 & E_{k-1}+\begin{pmatrix}y_2\\ \vdots\\ y_k\end{pmatrix}(x_2\cdots x_k)\end{pmatrix}$$

$$=x_1y_1\left(1+(x_2\cdots x_k)\begin{pmatrix}y_2\\ \vdots\\ y_k\end{pmatrix}\right)+\det\begin{vmatrix}1 & y_1(x_2\cdots x_k)\\ 0 & \\ \vdots & E_{k-1}+\begin{pmatrix}y_2\\ \vdots\\ y_k\end{pmatrix}(x_2\cdots x_k)-\begin{pmatrix}y_2\\ \vdots\\ y_k\end{pmatrix}x_1y_1(x_2\cdots x_k)\\ 0 & \end{vmatrix}$$

$$=x_1y_1\left(1+(x_2\cdots x_k)\begin{pmatrix}y_2\\ \vdots\\ y_k\end{pmatrix}\right)+\det\left(E_{k-1}+(1-x_1y_1)\begin{pmatrix}y_2\\ \vdots\\ y_k\end{pmatrix}(x_2\cdots x_k)\right)$$

$$=x_1y_1\left(1+(x_2\cdots x_k)\begin{pmatrix}y_2\\ \vdots\\ y_k\end{pmatrix}\right)+1+(1-x_1y_1)(x_2\cdots x_k)\begin{pmatrix}y_2\\ \vdots\\ y_k\end{pmatrix}$$

$$=x_1y_1+1+(x_2\cdots x_k)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_k\end{pmatrix}=1+(x_1\cdots x_k)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_k\end{pmatrix}=1+x^Ty$$

当A可逆时

$$\det(A+xy^T)=\det(A)\det(E+A^{-1}xy^T)=\det(A)(1+y^TA^{-1}x)=\det(A)+y^TA^{*}x$$

与(1)同理，当A不可逆时 $t\to 0$, $A'\to A$, $\det(A'+xy^T)=\det(A')+y^TA'^{*}x\to\det(A)+y^TA^{*}x$

σ 是一个同态 $G\to G'$. 定义 $\sigma^{-1}(a')=\{a\in G\mid\sigma(a)=a'\in G'\}$ 称为 a' 的完全反象.

单位元 $e'\in G'$ 的完全反象称为同态的核，记为 $\ker(\sigma)$

$\ker(\sigma)$ 是 G 的子群：

$\forall g_1,g_2\in\ker(\sigma)$ $\quad\therefore\sigma(g_1g_2^{-1})=\sigma(g_1)\sigma(g_2^{-1})=\sigma(g_1)\sigma(g_2)^{-1}=e'\cdot e'=e'$

$\therefore g_1g_2^{-1}\in\ker(\sigma)$ $\therefore\ker(\sigma)$ 是子群.

考虑左陪集 $a\ker(\sigma)$ $\quad\forall g_1\in\ker(\sigma)$ $\quad\sigma(ag_1)=\sigma(a)\sigma(g_1)=\sigma(a)e'=\sigma(a)$

σ 将 $a\ker(\sigma)$ 中所有元素映射到 $\sigma(a)$. 若 $g_2\in G$. s.t. $\sigma(g_2)=\sigma(a)$ 则 $g_2\in a\ker(\sigma)=\{g\in G\mid\sigma(g)=\sigma(a)\}$

右陪集 $\ker(\sigma)a$ $\quad\forall g_1\in\ker(\sigma)$ $\quad\sigma(g_1a)=\sigma(a)$ 且若 $g_2\in G$. s.t. $\sigma(g_2)=\sigma(a)$ 则 $g_2\in\ker(\sigma)a$

$\therefore\ker(\sigma)a=a\ker(\sigma)$

左陪集=右陪集.

(不是所有子群的左陪集=右陪集. 例: $G_n(\mathbb{R})$ 是 $M_n(\mathbb{R})$ 的子群 所有可逆n阶方阵 $\begin{pmatrix}1&0&&0\\1&1&0&\\0&0&0&\\&&&\ddots\\0&&&0\end{pmatrix}A$ 表示A中第二行加第一行后~~放~~ 第二行换. 第3到n行为0.

$A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ 表示第1列加第2列，第2列不变，其它列为零。显然 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in Gn(\mathbb{R})$ 半 $Gn(\mathbb{R})$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

定义：子群满足 $\forall g \in G$，$gH = Hg$，则称 H 是 G 的正规子群。

定义：商群：对于正规子群 H，$\{gH \mid g \in G\}$ 构成一个群。

① 两两不相交（或者说 g_1H 与 g_2H 要么不相交要么相等）

② G 中的乘法运算也是 $\{gH\}$ 中的乘法运算　$(g_1H)(g_2H) = g_1Hg_2H = g_1g_2H^2 = g_1g_2H \in \{gH\}$

③ G 中乘法满足结合律 $\therefore \{gH\}$ 中运算也满足结合律。

④ H 是 $\{gH\}$ 中单位元 $\because \forall gH \cdot H = H(gH) = gH^2 = gH$

⑤ gH 的逆元是 $g^{-1}H$。略。

$\therefore$ 构成群，写作 G/H，称为 G 对 H 的商群（H 是正规子群）

定理：H 是 G 的一个子群，H 是正规子群的充分必要条件是任意两个左（右）陪集之积还是一个左（右）陪集（思考题）

定义：$\varphi: G \to G/H: g \mapsto gH$ 自然同态（H 是正规子群）

$\therefore H = \ker(\varphi)$ $\because \varphi(h) = hH = H$ 是 G/H 的单位元

定理：（群同态基本定理）设 $\sigma: G \to G'$ 满同态，H 为 σ 的核，于是 $G/H \cong G'$ 同构。

证明：定义 $\psi: G/H \to G': gH \longmapsto \sigma(g)$

① ψ 是映射：若 $g_1H = g_2H$，则 $\exists h \in H$ $g_2 = g_1h$，则 $\psi(g_1H) = \sigma(g_1) = \sigma(g_1)e' = \sigma(g_1h) = \sigma(g_2) = \psi(g_2H)$

② ψ 是满射：$\forall g' \in G'$，~~$\exists g'H \in G/H$ s.t. $\psi(g'H) = \sigma(g') \in G$~~

$\because \sigma$ 满 $\therefore \exists g \in G$，$\sigma(g) = g'$

$\therefore \exists gH \in G/H$　$\psi(gH) = \sigma(g) = g' \in G'$

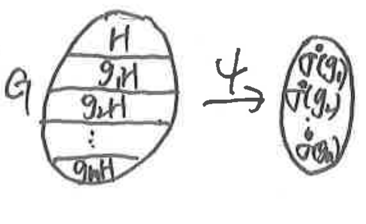
③ ψ 是单射：~~若 $g_1, g_2 \in G'$ 则 $\{g \in G \mid \sigma(g) = g_1'\} =$~~

若 $\sigma(g_1) = \sigma(g_2) \in G'$ 则 $g_1H = g_2H = \{g \in G \mid \sigma(g) = \sigma(g_2) \in G'\}$

$\therefore$ ~~G/H~~ ④ ψ 是同态：$\psi(g_1Hg_2H) = \psi(g_1g_2H) = \sigma(g_1g_2) = \sigma(g_1)\sigma(g_2) = \psi(g_1H)\psi(g_2H)$

$\therefore G/H \cong G'$ 同构

问题：为什么群可以不满足交换律，用来干嘛？



坍缩与商集的区别（商集不是群）

商集中等价类之间的 card 不同

而商群 $card(H) = card(g_1H)$ 对 $\forall g_1 \in G$